DER SATZ VON RIEMANN-ROCH IN FAISCEAU-THEORETISCHER FORMULIERUNG EINIGE ANWENDUNGEN UND OFFENE FRAGEN

FRIEDRICH HIRZEBRUCH

In diesem Vortrag möchte ich in einem ersten § die Resultate über den Riemann-Rochschen Satz und seine Verallgemeinerungen zusammenfassen, die ich in einer Note [1]) bereits veröffentlicht habe und über welche sich eine ausführliche Arbeit in Vorbereitung befindet. In § 2 soll dann als Anwendung u.a. eine Formel für die $h^{p,q}$ (= Anzahl der komplex-linear-unabhängigen harmonischen Formen vom Typ (p, q)) eines vollständigen Durchschnitts $V_n^{(a_1, a_2, \ldots, a_r)}$ von Hyperflächen der Grade $a_1, \ldots, a_r$ im komplexen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_{n+r}$ bewiesen werden. In § 3 wird u.a. die spezielle Gestalt des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Mannigfaltigkeiten mit verschwindenden Pontrjaginschen Klassen betrachtet. In einer gemeinsamen Arbeit mit A. Borel soll darauf näher eingegangen werden. Im letzten § werden einige Bemerkungen zur Theorie des virtuellen arithmetischen Geschlechtes gemacht und in diesem Zusammenhang auf ein ungelöstes Problem über kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten hingewiesen.

1. *Der Hauptsatz.*

1.1. Es sei V_n eine kompakte fast-komplexe Mannigfaltigkeit [1a]) der komplexen Dimension n mit den Chernschen Klassen $c_i \in H^{2i}(V_n, \boldsymbol{Z})$, $(c_0 = 1$, $c_i = 0$ für $i > n)$. Genauer gesagt sind die c_i die Chernschen Klassen des kontravarianten Tangentialbündels von V_n, das den komplexen Vektorraum $\boldsymbol{C}_n$ als Faser und die lineare Gruppe $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{C})$ als Strukturgruppe hat. $c_n[V_n]$, der Wert von c_n auf dem zur natürlichen Orientierung von V_n gehörigen ($2n$-dimensionalen) Fundamentalzyklus, ist gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik von V_n. Ein Bündel W über V_n mit dem komplexen Vektorraum $\boldsymbol{C}_q$ als Faser und mit $\boldsymbol{GL}(q, \boldsymbol{C})$ als Strukturgruppe wird kurz Vektorraum-Bündel und für $q = 1$ Geradenbündel genannt. Es seien $d_i \in H^{2i}(V_n, \boldsymbol{Z})$ die Chernschen Klassen von W, $(d_0 = 1$, $d_i = 0$ für $i > q)$. Wir schreiben formal unter Ver-

---

[1]) F. Hirzebruch, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., **40**, 110—114 (1954).

[1a]) Mannigfaltigkeiten werden nicht notwendigerweise als zusammenhängend vorausgesetzt.

wendung einer Unbestimmten x

$$(1)\qquad 1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots c_nx^n = (1+\gamma_1x)(1+\gamma_2x)\ldots(1+\gamma_nx) \text{ und}$$
$$1 + d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_qx^q = (1+\delta_1x)(1+\delta_2x)\ldots(1+\delta_qx).$$

Wir verabreden, jede Potenzreihe, die symmetrisch in den beiden Variablenreihen γ_i und δ_i ist, als Potenzreihe in den elementar-symmetrischen Funktionen c_i, d_i aufzufassen. Dem Bündel W über V_n wird ein Polynom $T_y(V_n, W)$ vom Grade n und mit rationalen Koeffizienten zugeordnet.

Definition:

$$(2)\qquad T_y(V_n, W) = \varkappa_n\Big[\Big(\sum_{j=1}^{q} e^{(1+y)\delta_j}\Big)\cdot \prod_{i=1}^{n}\big((1+y)\gamma_i(1-e^{-(1+y)\gamma_i})^{-1} - y\gamma_i\big)\Big]$$

$\varkappa_n[\ldots]$ ist immer so definiert: Der Ausdruck in $[\ldots]$ ist ein Element von $H^*(V_n, \boldsymbol{Z}) \otimes A$, ($A$ ist ein Koeffizientenbereich, im vorliegenden Fall ist $A = \boldsymbol{Q}(y)$ = Polynomring in einer Unbestimmten über den rationalen Zahlen. H^* bedeutet Cohomologiering). Von dem Ausdruck in $[\ldots]$ wird der Teil von der topologischen Dimension $2n$ genommen, dessen Wert auf dem Fundamentalzyklus der orientierten V_n ein bestimmtes Element von A ist, das mit $\varkappa_n[\ldots]$ bezeichnet wird. Wenn betont werden soll, dass $\varkappa_n$ in Bezug auf die Mannigfaltigkeit V_n zu verstehen ist, dann wird $\varkappa_n[\ldots]_{V_n}$ an Stelle von $\varkappa_n[\ldots]$ geschrieben. Wir setzen

$$(3)\qquad T_y(V_n, W) = \sum_{p=0}^{n} T^p(V_n, W)y^p,$$
$$T_0(V_n, W) = T^0(V_n, W) = T(V_n, W).$$

Offenbar ist

$$(4)\qquad T(V_n, W) = \varkappa_n\Big[\Big(\sum_{j=1}^{q} e^{\delta_j}\Big)\cdot \prod_{i=1}^{n} \gamma_i/(1-e^{-\gamma_i})\Big]$$
$$= \varkappa_n\left[\left(\sum_{j=1}^{q} e^{\delta_j}\right)e^{c_1/2}\cdot \prod_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i/2}{\sinh \gamma_i/2}\right]$$

Ferner ist

$$(5)\qquad T^p(V_n, W) = T(V_n, \mathfrak{T}^{(p)} \otimes W),$$

wo $\mathfrak{T}^{(p)}$ das Bündel der kovarianten p-Vektoren ist. Die Faser von $\mathfrak{T}^{(p)}$ ist der komplexe Vektorraum der Dimension $\binom{n}{p}$. Mit $\otimes$ wird das Tensorprodukt von Vektorraum-Bündeln bezeichnet.

1.2. In diesem Abschnitt sei V_n eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimsenion n und W sei ein *komplex-analytisches* Vektorraum-Bündel über V_n mit $\boldsymbol{C}_q$ als Faser und $\boldsymbol{GL}(q, \boldsymbol{C})$ als Strukturgruppe. Dann ist der Faisceau $\Omega(W)$ der Keime von lokalen holomorphen Schnittflächen von W wohldefiniert. Die Cohomologiegruppe $H^i(V_n, \Omega(W))$, die der Kürze wegen mit

$H^i(V_n, W)$ bezeichnet werde, ist ein Vektorraum über den komplexen Zahlen, der endliche Dimension hat [2]). $H^i(V_n, W)$ verschwindet für $i > n$. $H^0(V_n, W)$ ist der komplexe Vektorraum aller globalen holomorphen Schnittflächen von W. Die ganze Zahl $\chi(V_n, W)$ wird definiert durch

$$\chi(V_n, W) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(V_n, W). \tag{6}$$

Es sei $\mathfrak{T}^{(p)}$ das (komplex-analytische) Bündel der kovarianten p-Vektoren von V_n. Das Bündel $\mathfrak{T}^{(n)}$ ist ein Geradenbündel, wird mit K bezeichnet und kanonisches Geradenbündel von V_n genannt. Die erste Chernsche Klasse von $\mathfrak{T}^{(n)}$ ist gleich $-c_1$, wo c_1 die erste Chernsche Klasse von V_n bezeichnet. $\mathfrak{T}^{(0)}$ ist das triviale Geradenbündel.

Definition:

$$\chi^p(V_n, W) = \chi(V_n, W \otimes \mathfrak{T}^{(p)}) \tag{6*}$$

$$\chi_y(V_n, W) = \sum_{p=0}^{n} \chi^p(V_n, W) y^p$$

Nach Serre [3]) ist

$$H^p(V_n, W) \simeq H^{n-p}(V_n, K \otimes W^*) \text{ und} \tag{7}$$

$$H^p(V_n, W \otimes \mathfrak{T}^{(q)}) \simeq H^{n-p}(V_n, W^* \otimes \mathfrak{T}^{(n-q)}).$$

Hierbei ist W^* das duale Bündel von W.

Wenn W das triviale Geradenbündel ist, dann wird $\chi_y(V_n, W)$ gleich $\chi_y(V_n)$ gesetzt usw. $\chi(V_n) = \chi_0(V_n) = \chi^0(V_n)$ heisst arithmetisches Geschlecht von V_n. Nach Dolbeault [4]) ist für eine kählersche Mannigfaltigkeit V_n

$$\dim H^q(V_n, \mathfrak{T}^{(p)}) = h^{p,q}, \tag{8}$$

wo $h^{p,q}$ die Anzahl der komplex-linear-unabhängigen harmonischen Formen vom Typ (p, q) ist. Also ist

$$\chi^p(V_n) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{p,q} \tag{9}$$

Insbesondere gilt für eine *kählersche* Mannigfaltigkeit V_n

$$\chi(V_n) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q g_q, \tag{10}$$

wo g_q die Anzahl der komplex-linear-unabhängigen holomorphen Formen

---

[2]) H. Cartan et J. P. Serre, C. R. Acad. Sci., Paris, **237**, 128—130 (1953). — H. Cartan, Séminaire E.N.S., 1953—54. — K. Kodaira, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., **39**, 865—868 (1953).

[3]) J. P. Serre, Un théorème de dualité, Comm. math. Helv., **29**, 9—26 (1955).

[4]) P. Dolbeault, C. R. Acad. Sci., Paris, **236**, 175—177 (1953).

(1. Gattung) vom Grade q ist. Die Serreschen Dualitätsformeln (7) implizieren

(11) $\chi(V_n, W) = (-1)^n \chi(V_n, K \otimes W^*)$ und $\chi^p(V_n, W) = (-1)^n \chi^{n-p}(V_n, W^*)$.

1.3. *Hauptsatz: Es sei V_n eine algebraische Mannigfaltigkeit, (das soll hier heissen: V_n sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, die komplex-analytisch und singularitätenfrei in einen komplexen projektiven Raum eingebettet werden kann). W sei ein komplex analytisches Vektorraum-Bündel über V_n. Dann ist*

$$\chi(V_n, W) = T(V_n, W). \tag{12}$$

Aus dem Hauptsatz folgt mit Hilfe von (5) und (6*):

Es gilt unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes

$$\chi_y(V_n, W) = T_y(V_n, W), \tag{12*}$$

also insbesondere

$$\chi_y(V_n) = \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{n} \left((1+y)\gamma_i(1 - e^{-(1+y)\gamma_i})^{-1} - y\gamma_i\right)\right] \quad \text{und} \tag{13}$$

$$\chi(V_n) = \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{n} \gamma_i/(1 - e^{-\gamma_i})\right] \tag{14}$$

Die Formel (14) besagt, dass das arithmetische Geschlecht $\chi(V_n)$ gleich dem Toddschen Geschlecht $T(V_n)$ ist [5]).

An den Hauptsatz schliessen sich eine Reihe von Fragen an. Zum Beispiel:

1) Ist die Gleichung $\chi(V_n, W) = T(V_n, W)$ auch richtig für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit V_n und ein komplex-analytisches Vektorraum-Bündel W über V_n?

2) Ist $T(V_n, W)$ immer eine ganze Zahl? (V_n und W wie in 1.1.). Zu diesen Fragen vgl. man [6]).

1.4. Der vorstehende Hauptsatz ist eine weitgehende Verallgemeinerung des klassischen Riemann-Rochschen Satzes:

Für eine algebraische Mannigfaltigkeit V_n stehen die Divisorenklassen (in Bezug auf lineare Äquivalenz) in eineindeutiger Beziehung mit den (Isomorphieklassen von [7])) komplex-analytischen Geradenbündeln über V_n. Die

---

[5]) J. A. Todd, Proc. London Math. Soc. (2), **43**, 190—225 (1937). — F. Hirzebruch, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., **39**, 951—956 (1953).

[6]) F. Hirzebruch, Some problems on differentiable and complex manifolds, Ann. of Math., **60**, 213—236 (1954).

[7]) Im folgenden identifizieren wir stets zwei komplex-analytische Geradenbündel, wenn sie komplex-analytisch isomorph sind. Ein komplex-analytisches Geradenbündel über V_n ist dann aufzufassen als ein Element der Cohomologiegruppe $H^1(V_n, \mathfrak{h})$, wo $\mathfrak{h}$ der Faisceau der Keime von lokalen nicht-verschwindenden holomorphen Funktionen von V_n ist. Vgl. J. P. Serre, Centre Belge Rech. math., Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, 57—68 (1953). — Für den Satz, dass auf algebraischen Mannigfaltigkeiten die

Geradenbündel bilden in Bezug auf das Tensorprodukt, das der Multiplikation der Divisoren entspricht, eine (multiplikativ geschriebene [8])) abelsche Gruppe, die der Gruppe der Divisorenklassen in natürlicher Weise isomorph ist. Das inverse Bündel F^{-1} eines Geradenbündels F ist gleich dem dualen Bündel F^* von F. Die erste Chernsche Klasse $f = d_1(F) \in H^2(V_n, \boldsymbol{Z})$ des Geradenbündels F wird einfach Cohomologieklasse von F genannt. Wenn F zu dem Divisor D gehört, dann ist f dual zu der durch den Divisor repräsentierten $(2n-2)$-dimensionalen ganzzahligen Homologieklasse von V_n. Die Untergruppe derjenigen komplex-analytischen Geradenbündel, deren Cohomologieklasse verschwindet, ist gleich der Picardschen Mannigfaltigkeit von V_n. Nach dem Hauptsatz gilt für ein Geradenbündel F über einer algebraischen Mannigfaltigkeit V_n

$$(15) \quad \chi(V_n, F) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(V_n, F) = \varkappa_n \left[e^{f+\frac{1}{2}c_1} \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i/2}{\sinh \gamma_i/2} \right].$$

Nach Kodaira [9]) nennt man ein Geradenbündel F über V_n positiv, wenn seine Cohomologieklasse $f \in H^2(V_n, \boldsymbol{Z})$ als Fundamentalklasse einer kählerschen Metrik von V_n auftreten kann, (d.h. es existiert eine Kählermetrik $ds^2 = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \overline{dz^\beta}$ mit der Eigenschaft, dass die geschlossene Form

$$\omega = \frac{i}{2} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge \overline{dz^\beta}$$

bei dem de Rhamschen Isomorphismus die Cohomologieklasse $f' \in H^2(V_n, \boldsymbol{R})$ repräsentiert, wobei f' das Bild von f bei dem natürlichen Homomorphismus $H^2(V_n, \boldsymbol{Z}) \to H^2(V_n, \boldsymbol{R})$ ist). Insbesondere ist F dann positiv, wenn F gleich einem Geradenbündel ist, das zu einem Hyperflächenschnitt von V_n bezüglich einer geeigneten Einbettung von V_n in einen projektiven Raum gehört. Es gilt der folgende

Satz (Kodaira [9])). *Wenn F^{-1} positiv, dann $H^i(V_n, F) = 0$ für $i \neq n$. Wenn $F \otimes K^{-1}$ positiv, dann $H^i(V_n, F) = 0$ für $i \neq 0$.*

(Die beiden Aussagen des vorstehenden Satzes gehen bei Verwendung von (7) ineinander über).

---

komplex-analytischen Geradenbündel den Divisorenklassen in natürlicher Weise eineindeutig entsprechen, siehe K. Kodaira and D. C. Spencer, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., **39**, 868—877 (1953).

[8]) In der Literatur wird oft auch die additive Schreibweise verwandt. Die Gruppe der komplex-analytischen Geradenbündel ist nichts anderes als die Cohomologiegruppe $H^1(V_n, \mathfrak{h})$. Eine ganzzahlige Potenz eines Geradenbündels ist stets im Sinne des Produktes von Geradenbündeln zu verstehen.

[9]) K. Kodaira, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., **39**, 1268—1273 (1953). — K. Kodaira, On Kähler varieties of restricted type, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., **40**, 313—316 (1954) und Ann. of Math., **60**, 28—48 (1954).

Wegen dieses Satzes von Kodaira und der Formel (15) hat man den *Satz: Wenn $F \otimes K^{-1}$ positiv ist, dann ist*

$$(15^*) \qquad \dim H(V_n, F) = \varkappa_n \left[e^{f+\frac{1}{2}c_1} \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i/2}{\sinh \gamma_i/2} \right]$$

$H^0(V_n, F)$ ist der komplexe Vektorraum aller globalen holomorphen Schnittflächen von F und ist, wenn man F durch einen Divisor D repräsentiert, isomorph zum komplexen Vektorraum aller derjenigen meromorphen Funktionen g von V_n, für die gD keine Polstellen hat.

Die Formel (11) und der Kodairasche Satz ergeben unmittelbar, dass für eine algebraische Mannigfaltigkeit V_n gilt:

$$(16) \qquad 1 + (-1)^n p_a = 1 + (-1)^n P_a = \chi(V_n)\ ^{10)}.$$

Hierbei sind p_a, P_a die beiden klassischen arithmetischen Geschlechter; die Formel (16) wurde von Severi vermutet. Es wurde bereits erwähnt, dass $\chi(V_n)$ gleich dem Toddschen Geschlecht von V_n ist (siehe (14)).

2. *Vollständige Durchschnitte von Hyperflächen im komplexen projektiven Raum.*

2.1. Im komplexen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_{n+r}$ von $n + r$ komplexen Dimensionen betrachte man r singularitätenfreie Hyperflächen $F^{(a_1)}, \ldots, F^{(a_r)}$ von den Graden $a_1, \ldots, a_r$. Es werde vorausgesetzt, dass diese Hyperflächen in „allgemeiner Lage" sind. (Das soll hier heissen, dass jeder Punkt $x \in F^{(a_1)} \cap \ldots \cap F^{(a_r)}$ in $\boldsymbol{P}_{n+r}$ eine Umgebung U besitzt, in der lokale Koordinaten $z_1, \ldots, z_{n+r}$ mit x als Zentrum definiert sind und in der $U \cap F^{(a_i)}$ durch $z_{n+i} = 0$ gegeben wird). Der Durchschnitt $F^{(a_1)} \cap \ldots \cap F^{(a_r)}$ ist dann eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$ von n komplexen Dimensionen, die singularitätenfrei in $\boldsymbol{P}_{n+r}$ eingebettet ist und damit eine algebraische Mannigfaltigkeit im Sinne von 1.3 ist. $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$ wird „vollständiger Durchschnitt" der Hyperflächen $F^{(a_1)}, \ldots, F^{(a_r)}$ genannt. $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$ hängt als differenzierbare Mannigfaltigkeit nur von $n, a_1, \ldots, a_r$ ab. Für festes $n, a_1, \ldots, a_r$ sind jedoch die möglichen algebraischen Mannigfaltigkeiten $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$ i.a. nicht komplex-analytisch und auch nicht birational äquivalent, wie schon das Beispiel $n = 1$, $r = 1$, $a_1 = 3$ zeigt. $\boldsymbol{H}$ sei das zur Hyperebene von $\boldsymbol{P}_{n+r}$ gehörige Geradenbündel und $\tilde{\boldsymbol{H}}$ die Beschränkung von $\boldsymbol{H}$ auf $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$. Ferner sei $h \in H^2(\boldsymbol{P}_{n+r}, \boldsymbol{Z})$ die Cohomologieklasse von $\boldsymbol{H}$ und $\tilde{h} \in H^2(V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}, \boldsymbol{Z})$ die Cohomologieklasse von $\tilde{\boldsymbol{H}}$. Wir haben

---

10) K. Kodaira and D. C. Spencer, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., **39**, 641—649 (1953).

11) Wenn von *der* Chernschen Klasse gesprochen wird, ist die Summe $\sum_{i=0}^{\infty} c_r$ der Chernschen Klassen in den verschiedenen Dimensionen gemeint.

vor, das Polynom $\chi_y(V_n^{(a_1,\ldots,a_r)}, \tilde{H}^k)$ zu berechnen [8]). Es wird sich herausstellen, dass dieses Polynom nur von $n, a_1, \ldots, a_r, k$ abhängt.

Satz: Es sei $V_n = V_n^{(a_1,\ldots,a_r)}$ *vollständiger Durchschnitt von Hyperflächen der Grade* $a_1, \ldots, a_r$ *im* P_{n+r}. *Es gilt unter Einführung einer Unbestimmten* z

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \chi_y(V_n, \tilde{\mathrm{H}}^k) z^{n+r} = \frac{(1+zy)^{k-1}}{(1-z)^{k+1}} \prod_{i=1}^{r} \frac{(1+zy)^{a_i} - (1-z)^{a_i}}{(1+zy)^{a_i} + y(1-z)^{a_i}}$$

Beweis: Die Chernsche Klasse [11]) von P_{n+r} ist $(1+h)^{n+r+1}$. Daraus folgt in bekannter Weise für die Chernsche Klasse von V_n

$$(2) \qquad c(V_n) = (1+\tilde{h})^{n+r+1}(1+a_1\tilde{h})^{-1} \ldots (1+a_r\tilde{h})^{-1},$$

wobei natürlich $(1+a_i\tilde{h})^{-1} = \sum_{j=0}^{n} (a_i h)^j$. Wir setzen

$$Q(x) = x(y+1)(1-e^{-x(y+1)})^{-1} - yx \text{ und } Q(x) = \frac{x}{R(x)}.$$

Dann ist nach dem Hauptsatz (1.3)

$$\chi_y(V_n, \tilde{H}^k) = T_y(V_n, \tilde{H}^k) =$$

$$\varkappa_n\Big[e^{(1+y)k\tilde{h}} \,.\, \tilde{h}^{n+r+1} \,.\, R(\tilde{h})^{-(n+r+1)} \,.\, \prod_{i=1}^{r} \big((a_i\tilde{h})^{-1} R(a_i\tilde{h})\big)\Big]_{V_n} =$$

$$\varkappa_{n+r}\Big[e^{(1+y)kh} \,.\, h^{n+r+1} \,.\, R(h)^{-(n+r+1)} \,.\, \prod_{n=1}^{r} R(a_i h)\Big]_{P_{n+r}}$$

Daher ist

$$\chi_y(V_n, \tilde{H}^k) = \operatorname{resid}\,(e^{(1+y)kx} \,.\, R(x)^{-(n+r+1)} \,.\, \prod_{i=1}^{r} R(a_i x)),$$

wo resid $G(x)$ den Koeffizienten von x^{-1} in $G(x)$ bezeichnet. x ist eine Unbestimmte. Nach „Einführung einer neuen Variablen" $z = R(x)$ erhält man die zu beweisende Formel (1) wegen

$$e^{(1+y)x} = (1+zy)/(1-z), \quad R(ax) = \frac{(1+zy)^a - (1-z)^a}{(1+zy)^a + y(1-z)^a},$$

$$\frac{dz}{dx} = (1+zy)(1-z).$$

Bemerkung: Der vorstehende Satz wurde hier mit Hilfe des Hauptsatzes (1.3) bewiesen. Der Beweis des Hauptsatzes [12]) benutzt wesentlich die Thomsche Theorie [13]). Man kann den vorstehenden Satz auch ohne Thomsche Theorie

---

[12]) F. Hirzebruch, loc. cit. in [1]).

[13]) R. Thom, Comm. math. Helv. **28**, 17—86 (1954).

durch ein Induktionsverfahren mit Hilfe einer Formel von Kodaira-Spencer [14]) beweisen.

Ersetzt man in (1) y durch 0, dann geht (1) in die folgende Formel über

$$(1^*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \chi(V_n, \tilde{H}^k) z^{n+r} = (1-z)^{-(k+1)} \prod_{i=1}^{r} (1-(1-z)^{a_i}).$$

Für $k = 0$ ist dies eine Formel für das arithmetische Geschlecht $\chi(V_n)$ der vollständigen Durchschnitte V_n, die sich in anderer Form bei Lefschetz findet (Ann. of Math. 17, 197—212 (1916)).

2.2. Die vollständigen Durchschnitte sind algebraische Mannigfaltigkeiten mit sehr speziellen Eigenschaften. Es gilt nämlich das folgende

Lemma: Es sei $V_n = V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$ ein vollständiger Durchschnitt, und $\tilde{h}$ habe die in 2.1 angegebene Bedeutung. Dann gilt:

1) *V_n ist für $n \geqq 1$ zusammenhängend und für $n \geqq 2$ einfach -zusammenhängend.*

2) *Es ist $h^{p,q}(V_n) = \delta_{p,q}$ für $p + q \neq n$.*

3) *V_n hat keine Torsion. Die Gruppe $H^{2k}(V_n, Z)$ ist für $2k < n$ unendlich-zyklisch und wird von $\tilde{h}^k$ erzeugt.*

Beweis: Dass V_n für $n \geqq 1$ zusammenhängend ist, ergibt sich zum Beispiel aus einem Satz von Bertini. Aus einem Satz von Chow [15]) folgt, dass V_n für $n \geqq 2$ einfach-zusammenhängend ist. — Da $h^{p,p} \geqq 1$ und $\sum_{p+q=k} h^{p,q} = b_k =$ k. Bettische Zahl von V_n, genügt es zum Beweis von (2) zu zeigen, dass b_k für $k < n$ gleich 1 oder gleich 0 ist, jenachdem k gerade oder ungerade ist. Nach dem Satz von Lefschetz [16]) über Hyperflächenschnitte ist aber für $k < n$ die k. Bettische Zahl von $V_{n+1}^{(a_1, \ldots, a_{r-1}}$ gleich der von $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$. Also ergibt sich die Behauptung über b_k durch Induktion über r. Für $r = 0$ ist sie sicherlich richtig (V_n = komplexer projektiver Raum). — Zum Beweis von 2) wurde der Lefschetzsche Satz nur für die Cohomologie mit reellen (oder komplexen) Zahlen als Koeffizienten benötigt. Der Lefschetzsche Satz gilt aber auch für die ganzzahlige Cohomologie [17]) und ergibt dann, wieder durch Induktion über r, die Behauptung 3).

Korollar: Für einen vollständigen Durchschnitt V_n ist

$$(3) \qquad \chi^p(V_n) = (-1)^{n-p} h^{p,n-p} + (-1)^p \text{ für } 2p \neq n,$$
$$\chi^m(V_n) = (-1)^m h^{m,m} \text{ für } 2m = n.$$

---

[14]) K. Kodaira and D. C. Spencer, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 39, 1273—1278 (1953), Formel (14).

[15]) W. L. Chow, Amer. J. Math., 74, 726—736 (1952).

[16]) Vgl. zum Beispiel Kodaira-Spencer, loc. cit. in [14]).

[17]) Für einen neuen Beweis und für Anwendungen siehe die Arbeiten von Fáry (Cohomologie des variétés algébriques, Thèse, Collège de France, 1955).

2.3. Der Satz (2.1) gibt für $k = 0$ eine explizite Formel für die $\chi^p(V_n)$ und damit nach dem vorstehenden Korollar und nach 1.2 (9) auch für die $h^{p,q}(V_n)$. In dem folgenden Satz spezialisieren wir auf die vollständigen Durchschnitte von Quadriken.

Satz: Es sei $K_n^{(r)} = V_n^{(2,2,\ldots,2)}$ *vollständiger Durchschnitt von r Quadriken des* $\boldsymbol{P}_{n+r}$. *Dann ist*

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \chi_y(K_n^{(r)})z^n = (1 + yz)^{-1}(1 - z)^{-1}(2 + (y - 1)z)^r(1 + yz^2)^{-r}$$

Für $r = 1, 2, 3$ ergibt sich so

$V_n^{(2)}$, n ungerade : $h^{p,p} = 1$, alle anderen $h^{p,q} = 0$.

$V_n^{(2)}$, $n = 2m$: $h^{p,p} = 1$ für $p \neq m$, $h^{m,m} = 2$, alle anderen $h^{p,q} = 0$.

$V_n^{(2,2)}$, $n = 2m + 1$: $h^{p,p} = 1$, $h^{m,m+1} = h^{m+1,m} = m + 1$, alle anderen $h^{p,q} = 0$.

$V_n^{(2,2)}$, $n = 2m$: $h^{p,p} = 1$ für $p \neq m$, $h^{m,m} = 2m + 4$, alle anderen $h^{p,q} = 0$.

$V_n^{(2,2,2)}$, $n = 2m + 1$: $h^{p,p} = 1$, $h^{m,m+1} = h^{m+1,m} = (m + 1)(2m + 5)$, alle anderen $h^{p,q} = 0$.

$V_n^{(2,2,2)}$, $n = 2m$: $h^{p,p} = 1$ für $p \neq m$, $h^{m,m} = 3m^2 + 9m + 8$, $h^{m-1,m+1} = h^{m+1,m-1} = m(m + 1)/2$, alle anderen $h^{p,q} = 0$.

Bekanntlich ist für eine kählersche Mannigfaltigkeit V_n:

$$\chi_1(V_n) = \sum_{p=0}^{n} \chi^p(V_n) = \tau(V_n) = \text{Index } (V_n)\ ^{18)},$$

wo $\tau(V_n) = 0$ für ungerades n, und $\tau(V_{2m})$ gleich dem Überschuss der Anzahl der „Plus"-Zeichen über die Anzahl der „Minus"-Zeichen in der Diagonalform der durch $xx[V_{2m}](x \in H^{2m}(V_{2m}, \boldsymbol{R}))$ definierten quadratischen Form ist. Wir erhalten aus (4) für $y = 1$ die folgende Formel für die Indizes der vollständigen Durchschnitte von Quadriken

$$(4^*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \tau(K_n^{(r)})z^n = 2^r(1 - z^2)^{-1}(1 + z^2)^{-r}.$$

2.4. *Satz:* [19]) *Die Euler-Poincarésche Charakteristik von* $V_n = V_n^{(a_1,\ldots,a_r)}$ *werde mit* $E(V_n)$ *bezeichnet. Es ist*

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} E(V_n)z^n = (1 - z)^{-2}a_1a_2 \ldots a_r \prod_{i=1}^{r} (1 + (a_i - 1)z)^{-1}$$

Beweis ergibt sich aus Satz (2.1) für $k = 0$ und $y = -1$.

Bemerkung: Da $c_n[V_n] = E(V_n)$, lässt sich der vorstehende Satz allein auf Grund der Formel (2) beweisen. Wenn die Euler-Poincarésche Charakteristik

---

[18]) W. V. D. Hodge, Proc. International Congress of Math., I, 182—191 (1950).

[19]) Diese Formel findet sich in anderer Form bei J. A. Todd, loc. cit. in [5]), p. 197.

des vollständigen Durchschnitts V_n bekannt ist, dann sind wegen Lemma (2.2) alle Bettischen Zahlen von V_n bekannt.

2.5. Für diesen Abschnitt sei V_n eine zusammenhängende algebraische Mannigfaltigkeit mit $H^2(V_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Die vollständigen Durchschnitte sind für $n > 2$ solche algebraische Mannigfaltigkeiten [19a]).

Die Elemente $f \in H^2(V_n, \mathbf{Z})$ sind vom Typ (1,1) und treten deshalb alle als Cohomologieklassen von komplex-analytischen Geradenbündeln auf [20]). Die Gruppe $H^2(V_n, \mathbf{Z})$ hat zwei erzeugende Elemente. Dasjenige (eindeutig bestimmte) erzeugende Element, das als Cohomologieklasse eines positiven Geradenbündels auftritt (vgl. 1.4), werde mit g bezeichnet. Die erste Chernsche Klasse von V_n sei $c_1 = \mu g$. Bekanntlich ist $-c_1$ die Cohomologieklasse des kanonischen Geradenbündels K von V_n. Für ein komplex-analytisches Geradenbündel F mit der Cohomologieklasse f werde $f = \lambda(F)g$ gesetzt. $\lambda(F)$ ist eine wohlbestimmte ganze Zahl. Nach dem Satz von Kodaira (1.4) ist

$$(6) \qquad \begin{aligned} &H^i(V_n, F) = 0 \text{ für } i \neq n \text{ und } \lambda(F) < 0, \\ &H^i(V_n, F) = 0 \text{ für } i \neq 0 \text{ und } \lambda(F) + \mu > 0. \end{aligned}$$

Es sei zunächst $\mu > 0$.

Dann verschwindet $H^i(V_n, F)$ für alle i, wenn $-\mu < \lambda(F) < 0$.

Für $\lambda(F) \leqq -\mu$ ist nur $H^n(V_n, F)$ evtl. nicht null.

Für $\lambda(F) \geqq 0$ ist nur $H^0(V_n, F)$ evtl. nicht null.

Insbesondere verschwinden die g_i für $i \neq 0$. Also ist $\chi(V_n) = g_0 = 1$. (Wegen des Satzes von Kodaira (1.4) gilt allgemein: Wenn für eine algebraische Mannigfaltigkeit das Bündel K^{-1} positiv ist, dann verschwinden alle g_i für $i \neq 0$). Für eine algebraische Mannigfaltigkeit V_n mit $H^2(V_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ und $\mu > 0$ können alle Zahlen $\dim H^i(V_n, F)$ für jedes Geradenbündel F mit Hilfe der Formel 1.4 (15) berechnet werden.

Wenn $\mu \leqq 0$, dann bleibt es für $0 \leqq \lambda(F) \leqq -\mu$ unentschieden, ob mehr als eine Gruppe $H^i(V_n, F)$ nicht verschwindet.

2.6. Wir verwenden die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts. Für einen vollständigen Durchschnitt $V_n = V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$ mit $n > 2$ ist $H^2(V_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Es ist $g = \tilde{h}$ (vgl. 2.1 und Lemma (2.2)). Da $g_1(V_n) = 0$, verschwindet die Picardsche Mannigfaltigkeit von V_n und jedes Geradenbündel F ist durch $\lambda(F)$ in eindeutiger Weise bestimmt. Es ist $\mu = n + r + 1 - (a_1 + \ldots + a_r)$. Die g_i verschwinden für $0 < i < n$. (Es ist also $\chi(V_n) = 1 + (-1)^n g_n$ und daher

---

[19a]) Es werde hier hervorgehoben, dass jede *kählersche* Mannigfaltigkeit V_n mit $H^2(V_n, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ algebraisch ist. V_n ist nämlich offenbar eine Hodge-Mannigfaltigkeit (Kähler variety of restricted type) und deshalb algebraisch (Kodaira, loc. cit. in [9])).

[20]) Satz von Lefschetz-Hodge. Vgl. Kodaira-Spencer, loc. cit. in [7]).

$p_a = P_a = g_n \geqq 0$.) Nach 2.5 und nach 2.1 (Formel (1*)) lassen sich für $\mu \geqq 0$ die Dimensionen sämtlicher Cohomologiegruppen $H^i(V_n, F)$, F beliebiges komplex-analytisches Geradenbündel über V_n, berechnen.

Beispiele:

1) Für den komplexen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_n$ ($r = 0$ in 2.1 (1*)) ergibt sich

$$\chi(\boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{H}^k) = \binom{n+k}{k} \text{ also}$$

$$\dim H^0(\boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{H}^k) = \binom{n+k}{k} \text{ für } k \geqq 0, \dim H^n(\boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{H}^k) = \binom{-k-1}{n} \text{ für } -k \geqq n+1$$

dabei ist $\boldsymbol{H}$ das zur Hyperebene von $\boldsymbol{P}_n$ gehörige Geradenbündel. Alle anderen Gruppen $H^i(\boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{H}^k)$ verschwinden.

2) Für die in $\boldsymbol{P}_{n+1}$ eingebettete Quadrik $V_n^{(2)}$ ergibt sich

$$\chi(V_n^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{H}}^k) = \binom{n+k}{n} + \binom{n+k-1}{n}. \text{ Es ist}$$

$$\dim H^0(V_n^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{H}}^k) = \chi(V_n^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{H}}^k) \text{ für } k \geqq 0 \text{ und}$$

$$\dim H^n(V_n^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{H}}^k) = (-1)^n \chi(V_n^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{H}}^k) \text{ für } -k \geqq n,$$

dabei ist $\tilde{\boldsymbol{H}}$ das zum Hyperebenenschnitt von $V_n^{(2)}$ gehörige Geradenbündel. Alle anderen Gruppen $H^i(V_n^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{H}}^k)$ verschwinden.

3. *Riemann-Rochscher Satz und Pontrjaginsche Klassen.*

3.1. Für eine algebraische Mannigfaltigkeit V_n und ein komplex-analytisches Geradenbündel F über V_n wird $\chi(V_n, F)$ durch die Formel 1.4 (15) gegeben. $\dfrac{\gamma_i/2}{\sinh \gamma_i/2}$ ist eine Potenzreihe in γ_i^2. Die r-te elementar-symmetrische Funktion der γ_i^2 (aufgefasst als Polynom in den Chernschen Klassen c_i; vgl. 1.1) ist gleich der Pontrjagischen Klasse p_r von V_n, ($p_r \in H^{4r}(V_n, \boldsymbol{Z})$). Die Klassen p_r hängen nur von V_n als differenzierbarer Mannigfaltigkeit ab; sie hängen nicht von der Orientierung von V_n ab; sie bleiben bei allen differenzierbaren Homöomorphismen von V_n auf sich fest. Die Formel für $\chi(V_n, F)$ hat also die folgende Gestalt:

$$\chi(V_n, F) = \varkappa_n[Ae^{f+\frac{1}{2}c_1}]_{V_n}, \tag{1}$$

wo f die Cohomologieklasse von F, c_1 die erste Chernsche Klasse von V_n und A ein Polynom in den Pontrjaginschen Klassen von V_n ist, dessen 0-dimensionales Glied gleich 1 ist.

3.2. Wir wenden die Bemerkungen von 3.1 speziell auf algebraische Mannigfaltigkeiten V_n mit $H^2(V_n, \boldsymbol{Z}) \simeq \boldsymbol{Z}$ an [19a]). Wir benutzen die Bezeichnungen von 2.5. Die Zahl $\chi(V_n, F)$ hängt nur von $\lambda(F)$ ab. Für $\lambda(F) = k$ setzen wir $\chi(V_n, F) = \chi(V_n, k)$, d.h.

$$\chi(V_n, k) = \varkappa_n[Ae^{\left(k+\frac{\mu}{2}\right)\sigma}]_{V_n}. \tag{2}$$

Es sei V'_n eine algebraische Mannigfaltigkeit, die differenzierbar und orientierungstreu homöomorph zu V_n ist. „Orientierungstreu" ist in Bezug auf die natürlichen Orientierungen von V_n und V'_n gemeint. Die Cohomologie von V_n werde mit der von V'_n, dem Homoömorphismus entsprechend, identifiziert. Alles, was sich auf V'_n bezieht, werde mit $'$ versehen. Um $\chi(V'_n, k)$ zu erhalten, muss man auf der rechten Seite von (2) μ durch μ' und g durch g' ersetzen. A bleibt unverändert. Natürlich ist $g = \pm g'$. Wegen der Orientierungstreue ist $g^n = g'^n$, woraus folgt, dass $g = + g'$ für ungerades n. Ferner ist $\mu \equiv \mu'$ (mod 2), da c_1 und c'_1 bei Reduktion mod 2 die Stiefel-Whitneysche Klasse $w_2 \in H^2(V_n, Z_2)$ ergeben, welche topologisch invariant ist und bei Homöomorphismen von V_n auf sich festbleibt. Es folgt, dass *die Menge aller Zahlen $\chi(V_n, k)$ mit der Menge aller Zahlen $\chi(V'_n, k)$ übereinstimmt.* Insbesondere muss das arithmetische Geschlecht $\chi(V'_n)$ unter den $\chi(V_n, k)$ vorkommen.

Wenn n *ungerade* ist, $\chi(V'_n)$ bekannt ist und die Gleichung $\chi(V'_n) = \chi(V_n, k_0)$ für ein und nur ein k_0 zutrifft, dann ist μ' eindeutig bestimmt:

$$\left(k_0 + \frac{\mu}{2}\right) g = \frac{\mu'}{2} g' = \frac{\mu'}{2} g \text{ und } \mu' = 2k_0 + \mu.$$

Es sei n *gerade*. Dann gilt nach 1.3 (11): $\chi(V_n, k) = \chi(V_n, -\mu - k)$. Wenn $\chi(V'_n)$ bekannt ist und die Gleichungen $\chi(V'_n) = \chi(V_n, k_0) = \chi(V_n, -\mu - k_0)$ für ein und nur ein (nicht geordnetes) Zahlenpaar $(k_0, -\mu - k_0)$ zutreffen, dann ist $\mu' = \pm (2k_0 + \mu)$.

Beispiele:

1) $V_n = \boldsymbol{P}_n =$ komplexer projektiver Raum $(\mu = n + 1)$. Die algebraische Mannigfaltigkeit V'_n sei differenzierbar und orientierungstreu homöomorph zu V_n. Da die bettischen Zahlen $b_i = b'_i$ gleich 1 oder 0 sind, jenachdem i gerade oder ungerade ist, und da

$$(3) \qquad h^{p,p}(V'_n) \geqq 1 \text{ und } 2g'_{2p} + h^{p,p}(V'_n) \leqq b'_{2p} \text{ für } p > 0,$$

folgt $g'_i = 0$ für $i > 0$, also $\chi(V'_n) = 1$. — Die Zahl 1 kommt für *ungerades* n nur für $k = 0$ unter den Zahlen $\chi(\boldsymbol{P}_n, k)$ vor (vgl. 2.6, Beispiel 1)). Also ist $\mu' = \mu = n + 1 > 0$ für jede Mannigfaltigkeit V'_n. Also ist (siehe (2)) $\chi(\boldsymbol{P}_n, F) = \chi(V'_n, F')$, wenn die Cohomologieklassen von F und F' gleiche Vielfache von g bzw. g' sind, und nach 2.5 folgt dann: $\dim H^0(\boldsymbol{P}_n, F) = \dim H^0(V'_n, F')$. Daraus hat Kodaira gefolgert, dass für ungerades n jede algebraische Mannigfaltigkeit V'_n, die differenzierbar homöomorph zu $\boldsymbol{P}_n$ ist [21]), komplex-analytisch

---

[21]) Wenn n ungerade ist und V'_n homöomorph zu $\mathbf{P}_n$ ist, dann ist V'_n auch orientierungstreu homöomorph zu $\mathbf{P}_n$, da $\mathbf{P}_n$ einen die Orientierung umkehrenden Homöomorphismus auf sich besitzt.

homöomorph zu P_n ist, (nicht veröffentlicht; vgl. Hirzebruch, loc. cit. in [6])). — Für *gerades* n ergibt sich $\mu' = \pm (n+1)$. Es ist anscheinend nicht bekannt, ob eine V'_n mit $\mu' = -(n+1)$ existiert.

2) $V_n = V_n^{(2)} = n$-dimensionale Quadrik (vgl. 2.3). Die algebraische Mannigfaltigkeit V'_n sei differenzierbar und orientierungstreu homöomorph zu $V_n^{(2)}$. Es ergibt sich wie im obigen Beispiel mit Hilfe von (3), dass $\chi(V'_n) = 1$. Unter Verwendung von 2.6, Beispiel 2), erhält man, dass $\mu' = \mu = n$ für ungerades n und $\mu' = \pm n$ für gerades n. Für ungerades n haben entsprechende Gruppen $H^0(V_n^{(2)}, F)$, $H^0(V'_n, F')$ wieder gleiche Dimensionen.

3.3. Es sei V_n eine algebraische Mannigfaltigkeit, deren Pontrjaginsche Klassen p_i für $i > 0$ verschwinden. Dann nimmt nach 3.1 die Formel für $\chi(V_n, F)$, F komplex-analytisches Geradenbündel über V_n, die folgende Gestalt an:

$$\chi(V_n, F) = \varkappa_n[e^{f+\frac{1}{2}c_1}] = (n!)^{-1}(f + \tfrac{1}{2}c_1)^n[V_n]. \tag{4}$$

f ist die Cohomologieklasse von F. Insbesondere gilt für das arithmetische Geschlecht:

$$\chi(V_n) = (n!)^{-1}2^{-n}c_1^n[V_n] \tag{4*}$$

Algebraische Mannigfaltigkeiten mit verschwindenden Pontrjaginschen Klassen sind zum Beispiel die homogenen Räume G/T, wo G eine kompakte einfache Liesche Gruppe und T ein maximaler Torus von G ist. Die auftretenden Zahlen $|\chi(V_n, F)|$ stimmen mit den Graden der irreduziblen Darstellungen von G überein. Die Stiefel-Whitneysche Klasse $w_2 \in H^2(G/T, \boldsymbol{Z}_2)$ ist gleich 0. Für Einzelheiten muss auf die in der Einleitung erwähnte gemeinsame Arbeit mit A. Borel hingewiesen werden. Wir bemerken hier nur, dass für eine algebraische Mannigfaltigkeit V_n mit $p_i = 0$ (für $i > 0$) und $w_2 = 0$ wegen Formel (4) folgendes gilt:

Für jedes Element $f \in H^2(V_n, \boldsymbol{Z})$, das vom Typ (1,1) ist, d.h. als Cohomologieklasse eines komplex-analytischen Geradenbündels auftritt [20]), hat man die Kongruenz

$$f^n \equiv 0 \pmod{n!} \tag{5}$$

Frage: Es sei V^{2n} eine kompakte orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ mit $p_i = 0$ (für $i > 0$) und $w_2 = 0$. Gilt für jedes $f \in H^2(V^{2n}, \boldsymbol{Z})$ die Kongruenz (5)? (Vgl. Hirzebruch, loc. cit. in [6])).

4. *Über virtuelle arithmetische Geschlechter.*

4.1. Es sei V_n eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Eine (nichtgeordnete) Menge von r komplex-analytischen Geradenbündeln $F_1, \ldots, F_r$ von V_n heisst virtuelle Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - r$ von V_n. Es soll das virtuelle arithmetische Geschlecht $\chi(F_1, \ldots, F_r)_{V_n}$ dieser virtuellen Untermannigfaltigkeit definiert werden.

Definition:

$$\chi(F_1, \ldots, F_r)_{V_n} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \sum_{i_1 < \ldots < i_j} \chi(V_n, F_{i_1}^{-1} \otimes \ldots \otimes F_{i_j}^{-1}).$$

Die innere Summe ist über alle möglichen $\binom{r}{j}$ Kombinationen zu erstrecken. Zum Beispiel ist

$r = 0, \quad \chi(\ )_{V_n} = \chi(V_n)$

$r = 1, \quad \chi(F_1)_{V_n} = \chi(V_n) - \chi(V_n, F_1^{-1})$

$r = 2, \quad \chi(F_1, F_2)_{V_n} = \chi(V_n) - \chi(V_n, F_1^{-1}) - \chi(V_n, F_2^{-1}) + \chi(V_n, F_1^{-1} \otimes F_2^{-1})$

Das virtuelle arithmetische Geschlecht hat die folgenden Eigenschaften, die seine Definition rechtfertigen.

(1) $\chi(F_1, \ldots, F_r)_{V_n}$ hängt nicht von der Reihenfolge der F_i ab.

(2) Wenn F_1 ein Geradenbündel ist, das zu einem singularitätenfreien Divisor S gehört, dann ist

a) $\chi(F_1)_{V_n} = \chi(S)$ b) $\chi(F_1, \ldots, F_r)_{V_n} = \chi((F_2)_S, \ldots, (F_r)_S)_S$

Der Divisor S heisst dabei singularitätenfrei, wenn er lokal durch $z = 0$ gegeben werden kann. S ist also eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$. Mit $(F_i)_S$ wird die Beschränkung von F_i auf S bezeichnet.

(3) Es gilt für $r \geqq 1$ die folgende „Funktionalgleichung".

$$\chi(A \otimes B, F_2, \ldots, F_r)_{V_n}$$
$$\chi(A, F_2, \ldots, F_r)_{V_n} + \chi(B, F_2, \ldots, F_r)_{V_n} - \chi(A, B, F_2, \ldots, F_r)_{V_n}$$

(F_i, A, B sind komplex-analytische Geradenbündel über V_n).

Aus (2) folgt: Wenn $F_1, \ldots, F_r$ $(1 \leqq r \leqq n)$ zu singularitätenfreien Divisoren $S_1, \ldots, S_r$ gehören und wenn die Hyperflächen $S_1, \ldots, S_r$ von V_n sich „allgemein" schneiden, dann ist $\chi(F_1, \ldots, F_r)_{V_n}$ gleich dem arithmetischen Geschlecht der komplexen Mannigfaltigkeit $S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_r$, welche die Dimension $n - r$ hat. Die Formel (1*) von 2.1 gibt für $k = 0$ für den komplexen projektiven Raum die Werte aller möglichen virtuellen arithmetischen Geschlechter, wenn man für die a_i auch negative ganze Zahlen zulässt.

4.2. Für eine algebraische Mannigfaltigkeit V_n und komplex-analytische Geradenbündel $F_1, \ldots, F_r$ folgt aus der Definition (4.1) und aus 1.4 (15), dass

$$\chi(F_1, \ldots, F_r)_{V_n} = \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{r} (1 - e^{-f_i}) e^{c_1/2} \prod_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j/2}{\sinh \gamma_j/2} \right], \tag{4}$$

wobei $f_i \in H^2(V_n, Z)$ die Cohomologieklasse von F_i ist. Da $1 - e^{-f_i}$ durch f_i teilbar ist, enthält der Ausdruck in $[\ldots]$ für $r > n$ kein Glied der topologischen Dimension $2n$, und es ergibt sich der

Satz: *Das virtuelle arithmetische Geschlecht* $\chi(F_1, \ldots, F_r)_{V_n}$ *verschwindet für* $r > n$, *wenn* V_n *eine algebraische Mannigfaltigkeit ist.*

Problem: *Ist der vorstehende Satz für beliebige kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten* V_n *richtig*? Einfachster Fall ($n = 2$, $F_1 = F_2 = F_3 = F^{-1}$):

Ist die folgende Gleichung für eine kompakte komplexe V_2 und ein komplex-analytisches Geradenbündel F über V_2 immer richtig?

$$\chi(V_2) - 3\chi(V_2, F) + 3\chi(V_2, F^2) - \chi(V_2, F^3) = 0.$$

4.3. Aus der obigen Formel 4 und aus 1.4 (15) kann man sofort erhalten:

Satz: *Es sei* V_n *algebraisch und* F *ein komplex-analytisches Geradenbündel. Dann ist*

$$(5) \quad \chi(V_n, F) = \chi(V_n) + \chi(F)_{V_n} + \chi(F, F)_{V_n} + \cdots + \underbrace{\chi(F, \ldots, F)_{V_n}}_{n \text{ mal}}$$

Beweis: Im Cohomologiering von V_n gilt die Gleichung

$$e^f = (1 - (1 - e^{-f}))^{-1} = \sum_{j=0}^{n} (1 - e^{-f})^j.$$

Der vorstehende Satz wurde im wesentlichen von Severi [22]) vermutet.

4.4. Der Satz (4.2) kann natürlich auch direkt bewiesen werden. In der Tat, nach einem bekannten Satz kann F_1 in der Form $S \otimes T^{-1}$ geschrieben werden, wo S, T Geradenbündel sind, die zu singularitätenfreien Divisoren gehören. Es folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung 4.1 (3)

$$(6) \quad \chi(S, F_2, \ldots, F_r)_{V_n} = \chi(F_1, F_2, \ldots, F_r)_{V_n} + \chi(T, F_2, \ldots, F_r)_{V_n} - \chi(T, F_1, \ldots, F_r)_{V_n}$$

Der Satz (4.2) ergibt sich aus (6) und aus 4.1 (2) durch Induktion über n.

Auch die Severische Formel (5) kann direkt bewiesen. Auf Grund der Definition des virtuellen arithmetischen Geschlechtes ist nämlich die folgende Gleichung eine rein formale Identität

$$(5^*) \quad \chi(V_n, F) = \chi(V_n) + \chi(F)_{V_n} + \chi(F, F)_{V_n} + \cdots + \underbrace{\chi(F, \ldots, F)_{V_n}}_{n \text{ mal}} + \underbrace{\chi(F, \ldots, F)_{V_n}}_{n+1 \text{ mal}} - \chi(F^{-1}, \underbrace{F, \ldots, F}_{n+1 \text{ mal}})$$

Aus Satz (4.2) folgt jetzt (5).

4.5. Für eine algebraische Mannigfaltigkeit V_n und ein komplex-analytisches Geradenbündel F über V_n hängt $\chi(V_n, F)$ nach 1.4 (15) nur von der reellen Cohomologieklasse von F ab, welche sich ergibt, wenn man auf die ganzzahlige Cohomologieklasse f von F ($f \in H^2(V_n, \mathbf{Z})$ den natürlichen Homo-

---

[22]) F. Severi, Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. algebrique, 9—55 (1950).

morphismus $H^2(V_n, Z) \to H^2(V_n, R)$ anwendet. Kodaira und Spencer haben oft die folgende *Frage* gestellt:

Ist $\chi(V_n, F)$ für eine beliebige kompakte komplexe Mannigfaltigkeit nur von der reellen Cohomologieklasse von F abhängig?

Serre hat bemerkt, dass man die vorstehende Frage für eine gegebene kompakte komplexe Mannigfaltigkeit V_n und jedes komplex-analytische Geradenbündel F über V_n zu bejahen hat, wenn für beliebige komplex-analytische Geradenbündel A, B über V_n gezeigt werden kann, dass $\chi(V_n, A \otimes B^k)$, k durchlaufe die ganzen Zahlen, ein Polynom in k ist.

Satz: Wenn für eine kompakte komplexe V_n das virtuelle Geschlecht $\chi(F_1, \ldots, F_{n+1})_{V_n}$ immer verschwindet, dann ist für komplex-analytische Geradenbündel A, B über V_n immer $\chi(V_n, A \otimes B^k)$ ein Polynom in k.

Beweis: Wir beweisen die äquivalente Aussage, dass $\chi(A \otimes B^k)_{V_n}$ ein Polynom in k ist. Man fasse $\chi(A \otimes B^k)_{V_n}$ als eine Zahlenfolge auf. k durchlaufe alle ganzen Zahlen. Durch wiederholte Anwendung der Funktionalgleichung 4.1 (3) kann man die iterierten Differenzenfolgen bilden. Die Zahlen der $(n + 1)$ Differenzenfolge sind Summen von Summanden der From $\pm \chi(F_1, \ldots, F_{n+1})_{V_n}$ die nach Voraussetzung verschwinden. Also ist $\chi(A \otimes B^k)_{V_n}$ ein Polynom n. Grades.

Der vorstehende Satz zeigt, dass die oben gestellte Frage mit dem Problem von 4.2 eng zusammenhängt.

Für weitere Einzelheiten der Theorie des virtuellen arithmetischen Geschlechts und für Definition und Eigenschaften des virtuellen χ_y-Geschlechtes, das für den Beweis des Hauptsatzes (1.3) wichtig ist, muss auf die in Vorbereitung befindliche Arbeit verwiesen werden (siehe Einleitung). Das virtuelle χ_y-Geschlecht geht für $y = 0$ in das virtuelle arithmetische Geschlecht über. — Es sollten in diesem § nur einige Bemerkungen und Beispiele gegeben werden. Bei einem systematischen Aufbau der Überlegungen, die schliesslich zu dem Hauptsatz (1.3) führen, hat die Theorie des virtuellen χ_y-Geschlechtes mit am Anfang zu stehen. Schliesslich werde noch bemerkt, dass das hier definierte virtuelle arithmetische Geschlecht für algebraische Mannigfaltigkeiten mit dem klassischen virtuellen arithmetischen Geschlecht übereinstimmt, da es durch seine Eigenschaften 4.1 (1)—(3), die auch von dem klassischen virtuellen Geschlecht erfüllt werden, für algebraische Mannigfaltigkeiten in eindeutiger Weise festgelegt ist. Zu beachten ist, dass das klassische arithmetische Geschlecht mit χ in der Beziehung $\chi(V_n) = 1 + (-1)^n p_a(V_n)$ steht [22]. Wenn etwas weiter oben von Übereinstimmung gesprochen wurde, dann ist natürlich gemeint, dass diese Beziehung auch im virtuellen Fall gilt, d.h. also:

---

[22]) Wir setzen hier voraus, dass V_n zusammenhängend ist.

$$(-1)^{n-r+1} + (-1)^{n-r}\chi(F_1, \ldots, F_r)_{V_n} = p_a'(F_1, \ldots, F_r)_{V_n} = P_a(F_1, \ldots, F_r)_{V_n}.$$

Die Funktionalgleichung 4.1 (3) ist für das klassische Geschlecht entsprechend abzuändern.

SCHÜTZENSTR. 19, BEI SPITZLEY,
WITTEN/RUHR, DEUTSCHLAND.