

# Singularities and exotic spheres

FRIEDRICH HIRZEBRUCH

In: Tagungsbericht 27/1996, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Vortrag anlässlich des 60. Geburtstags von Egbert Brieskorn, Kurzfassung. Engl. transl. in: Journal of Singularities 18 (2018), p. 35.

Bericht über das akademische Jahr 1965/66. Brieskorn ist C.L.E. Moore Instructor am M.I.T., Jänich ist an der Cornell University, dann am IAS in Princeton. Ich bin in Bonn. Es gibt ausgedehnte Korrespondenz. Vom 30.9.–7.10.1965 bin ich bei einer Konferenz in Rom (Bericht über Brieskorn's simultane Auflösungen). Dort erreicht mich Brieskorn's Brief vom 28.9.1965: *“Ich habe in den letzten Tagen die etwas verwirrende Entdeckung gemacht, daß es vielleicht 3-dimensionale normale Singularitäten gibt, die topologisch trivial sind. Ich habe das Beispiel heute nachmittag mit Mumford diskutiert, und er hatte bis heute abend noch keinen Fehler gefunden; hier ist es:  $X = \{x \in \mathbb{C}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3 = 0\}$ .”* Beweis durch Auflösung und Berechnung aller Invarianten des Umgebungsrandes. In den Proc. Nat. Acad. Sci. USA erscheint allgemeiner das Beispiel  $x_1^2 + \dots + x_k^2 + x_{k+1}^3 = 0$  ( $k$  ungerade).

Bericht über die umfangreiche Korrespondenz, die sich anschließt, über Brieskorn's Entdeckung der Arbeit von Pham, die es ihm ermöglicht, Milnor's assertion in einem Brief an Nash zu beweisen – Milnor an Nash am 13.4.1966: *“The Brieskorn example is fascinating. After staring at it a while I think I know which manifolds of this type are spheres but the statement is complicated and a proof does not exist. Let  $\Sigma(p_1, \dots, p_n)$  be the locus  $z_1^{p_1} + \dots + z_n^{p_n} = 0$ ,  $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1$ , where  $p_j \geq 2 \dots$ ”* Dann gibt Milnor die Bedingung a) oder b) für die Exponenten an. – Allmählich wird es allen Beteiligten klar, daß zur Bestimmung der differenzierbaren Struktur die Berechnung der Signatur von  $z_1^{p_1} + \dots + z_n^{p_n} = 1$  ( $n \geq 3$ ,  $n$  ungerade) erforderlich ist. Darüber gibt es manche Briefe von Brieskorn an mich und umgekehrt. Brieskorn schreibt seine Arbeit für die Inventiones Bd. 2 (1966). In diesem Zusammenhang hat er auch  $\Sigma(2, 3, 5, 30)$ ,  $30 =$  Coxeterzahl von  $E_8$ , studiert und schließlich die kleinen Auflösungen dieser Singularität in Kurven gemäß  $E_8$ -Baum und damit die simultane Auflösung der Flächenfamilien  $x_1^2 + x_2^3 + x_3^5 + t^{30} = 0$  (Parameter  $t$ ) bewerkstelligt und den übriggebliebenen Fall seiner Math. Ann. Arbeit von 1966 (über die ich in Rom berichtete) erledigt. Verständnis im Rahmen der Wurzelsysteme und der Weylschen Gruppe wurde erzielt (Brieskorn's Brief an Frau Tjurina vom 13.9.1966) – Jänich hatte  $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten  $W^{2n-1}(d)$  studiert (zwei Orbitypen mit Isotropiegruppen  $O(n-2)$ ,  $O(n-1)$  und Orbitraum  $D^2, S^1$ ) und diese klassifiziert, sowie Knotenmannigfaltigkeiten  $M^{2n+1}(k)$ , auf denen  $O(n)$  operiert (drei Orbitypen  $O(n-2)$ ,  $O(n-1)$ ,  $O(n)$  mit Orbitraum  $D^4, S^3 - k$ ,  $k$  ( $k$  der Knoten)). Ich bringe die beiden in USA befindlichen zusammen durch Bericht vom März 1966, z.B.  $W^{2n-1}(d)$  ist  $\Sigma(2, \dots, 2, d)$  und  $M^{2n+1}$ (Torusknoten 3,5) ist  $\Sigma(2, \dots, 2, 3, 5)$ . Brieskorn schreibt am 29.3.1966: *“Klaus Jänich und ich hatten von diesem Zusammenhang unserer Arbeiten nichts gemerkt, und ich war vor Freude ganz außer mir, wie Sie nun die Dinge zusammengebracht haben,”*

Ich hatte hier in Oberwolfach die gleiche Freude, darüber erzählen zu können.