

Sitzung der Math.-nat. Klasse
am 30. November 1991

Der Sekretar begrüßt die neuen o. Mitglieder, die Herren Beyreuther, Häfner, Wolfrum, sowie zahlreiche Gäste (u. a. Mitglieder der Mathematischen Kommission).

1. Herr Hirzebruch hält einen Vortrag „Kombinatorik in der Geometrie“.

Die wichtigsten Eigenschaften der Euler-Poincaréschen Charakteristik eines topologischen Raumes werden erläutert. Als Beispiel des Lefschetzschen Fixpunktsatzes wird folgender Satz angegeben: Wenn die Kreislinie auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit differenzierbar operiert, und zwar mit isolierten Fixpunkten, dann ist die Charakteristik der Mannigfaltigkeit gleich der Anzahl der Fixpunkte. Die Fahnenmannigfaltigkeit $F(n)$ des n -dimensionalen komplexen Vektorraumes besteht aus allen Fahnen, das sind n -tupel 1-dimensionaler komplexer Unterräume, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. Die Drehung, die in den 1-dimensionalen Unterräumen einer festen Fahne um die Winkel $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, n\alpha$ dreht, läßt diese Fahne und alle Fahnen, die durch Vertauschung der 1-dimensionalen Unterräume entstehen, fest. Keine anderen Fahnen werden festgehalten. Deshalb ist die Charakteristik von $F(n)$ gleich $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ der Ordnung der symmetrischen Gruppe S_n von n Objekten. Hiermit ist das Studium der Gruppe S_n aller Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$ in Kombinatorik und Geometrie motiviert, das nun in verschiedenen Richtungen weiter verfolgt wird. So läßt sich die $(2r)$ -te Bettische Zahl von $F(n)$ angeben als die Anzahl der Permutationen σ , für die es genau r Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\sigma(j) > \sigma(i)$ gibt. Die Bettischen Zahlen in den ungeraden Dimensionen verschwinden. Die Fixpunkte induzieren eine Zellenzerlegung von $F(n)$ in geradedimensionale Zellen.

Hauptanliegen des Vortrags ist, die Eulerschen Polynome

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} W_{n,k} z^k$$

in Erinnerung zu rufen. Hier ist $W_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen σ von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit k Abstiegen, d. h. die Ungleichung $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ gilt für genau k Werte von i (wobei $1 \leq i \leq n$). Es gilt auch folgendes: $W_{n,k}$ gibt an, auf wieviel verschiedene Weisen man n Türme auf ein $n \times n$ Schachbrett stellen kann, so daß keiner einen anderen schlägt und sich genau k unterhalb der Hauptdiagonale befinden. Es ist

$$P_1(z) = 1, P_2(z) = 1 + z, P_3(z) = 1 + 4z + z^2,$$

$$P_4(z) = 1 + 11z + 11z^2 + z^3, P_5(z) = 1 + 26z + 66z^2 + 26z^3 + z^4.$$

Die Eulerschen Polynome werden auch durch folgende Identität charakterisiert

$$\frac{zP_n(z)}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k$$

Sie sind mir u. a. in folgenden Zusammenhängen begegnet.

Es gibt interessante algebraische Varietäten der komplexen Dimension $n - 1$, deren holomorphe Euler-Charakteristiken bis auf das Vorzeichen gleich den $W_{n,k}$ sind: Es sei A eine prinzipal polarisierte n -dimensionale abelsche Varietät. Ein zur Polarisierung gehöriger Thetadivisor D in A hat die komplexe Dimension $n - 1$, ist der einzige Divisor in seiner linearen Äquivalenzklasse und kann in A durch die Aktion von A auf sich bewegt werden. Im allgemeinen ist D glatt, und man kann für $0 \leq k \leq n - 1$ die holomorphe Euler-Charakteristik von D mit Koeffizienten in der Garbe der Keime holomorpher k -Formen bilden. Sie werde mit $\chi^k(D)$ bezeichnet. Eine Rechnung im Sinne meines Riemann-Roch-Satzes, die man in dieser Weise immer durchführen kann, wenn das Tangentialbündel der Varietät plus ein Geradenbündel trivial ist, ergibt

$$(-1)^{n-1-k} \chi^k(D) = W_{n,k}.$$

Das arithmetische Geschlecht $\chi^0(D)$ ist also gleich $(-1)^{n-1}$. Man kann mittels Verschiebungen durch Operationen von A auf sich r Theta-Divisoren finden, die in allgemeiner Lage zueinander sind. Ihr Durchschnitt werde mit $D^{(r)}$ bezeichnet. Es ist eine glatte Varietät der Dimension $n - r$. Das arithmetische Geschlecht von $D^{(r)}$ multipliziert mit $(-1)^{n-r}$ ist gleich $r!$ mal der Stirlingschen Zahl $|n \atop r|$, d.h. der Anzahl der Zerlegungen einer n -zähligen Menge in r disjunkte nicht-leere Teilmengen.

Die Berechnung von holomorphen Euler-Charakteristiken hängt in vielen Fällen mit dem Abzählen von Gitterpunkten zusammen. Das führte vor langer Zeit zur Berechnung des Volumens von Würfelschnitten (W. Meyer-R. von Randow). Erst vor wenigen Tagen habe ich nach Diskussion und Korrespondenz mit Zbigniew Ciesielski folgendes bemerkt.

Es sei $B_n(x)$ das Volumen der folgenden Menge im n -dimensionalen reellen Raum (Würfelschnitt):

$$\left\{ t \mid t \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t_i \leq 1, x \leq \sum_{i=1}^n t_i \leq x + 1 \right\}.$$

Dann ist $B_n(x)$ eine $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen x . In jedem Intervall $[j, j + 1]$, wo j eine ganze Zahl ist, wird sie durch ein Polynom vom Grade n gegeben. Sie verschwindet außerhalb des Intervalls $[-1, n]$. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_n(x) dx = 1.$$

Durch die erwähnten Eigenschaften ist der Spline $B_n(x)$ eindeutig bestimmt.

Es gilt $B_n(k) = \frac{W_{n,k}}{n!}$, für $k \geq 0$.

Der Wert des Eulerschen Polynoms $P_n(z)$ an der Stelle $z = -1$ ist von besonderem Interesse. Er ist gleich der Signatur der differenzierbaren $(2n - 2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit D . In der Tat ist $P_n(-1) = 0$, wenn n gerade, und für $n = 2b + 1$ ist

$$P_{2b+1}(-1) = (-1)^b \text{tg}^{(2b+1)}(0),$$

was dem Zusammenhang des Signaturatzes mit der Tangensfunktion entspricht. Es ist

$$\operatorname{tg}(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{n!} x^n,$$

wo die t_n ganze Zahlen sind mit $t_{2b+1} = \operatorname{tg}^{(2b+1)}(0)$. Die ganze Zahl t_n ist gleich der Anzahl der Zick-Zack-Permutationen von n Objekten. (Eine Permutation a_1, a_2, \dots, a_n von $1, 2, \dots, n$ heißt Zick-Zack-Permutation, wenn

$$a_1 > a_2, a_2 < a_3, a_3 > a_4, \dots).$$

Diese Übereinstimmung ist mindestens seit 1880 bekannt (D. André). Aber wie erklärt sich, daß die Anzahl der Zick-Zack-Permutationen von $2b+1$ Objekten (bis auf das Vorzeichen) die Signatur der Varietät D (Theta-Divisor) der komplexen Dimension $2b$ ist? Eine Liste der Anzahlen t_n der Zick-Zack-Permutationen folgt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936	50521

Zu Beginn des Vortrags wurde auch noch auf die Bedeutung der t_{2b+1} für Triangulationen gerade-dimensionaler Mannigfaltigkeiten hingewiesen. Die Euler-Poincarésche Charakteristik e einer $2m$ -dimensionalen triangulierten Mannigfaltigkeit läßt sich nach klassischen Ergebnissen (Dehn-Sommerville, V. Klee, E. Peschl) durch die Anzahlen a_{2b} der geradedimensionalen Simplexes ausdrücken:

$$e = 2 \sum_{h=0}^m (-1)^h \frac{t_{2h+1}}{2^{2h+1}} a_{2h}.$$

Die $(2m)$ -Sphäre hat eine Triangulation mit $a_{2b} = \binom{2m+2}{2b+1}$, wodurch sich eine bekannte Formel zur induktiven Berechnung der t_{2b+1} ergibt (Schläfli).