

Kurven auf den Hilbertschen Modulflächen  
und Klassenzahlrelationen

---

F. Hirzebruch

In meinem Mannheimer Vortrag habe ich die Kurven auf den Hilbertschen Modulflächen betrachtet, die durch schief-hermitesche Matrizen definiert werden (siehe § 3 (11)) und die zum Teil bereits für Klassifikationsfragen ([4], [5]) verwendet wurden. Homologiebeziehungen zwischen den Kurven führen zu Klassenzahlrelationen, da die Schnittzahl zweier Kurven durch eine Summe von Klassenzahlen gegeben werden kann. Die berühmte Hurwitzsche Klassenzahlrelation [6] kann durch eine solche Schnittzahlbetrachtung bewiesen werden, das ist sicher wohlbekannt. Dieser Beweis zeigt, wie man entsprechende Beweise für Kurven auf den Hilbertschen Modulflächen führen und zu neuen Klassenzahlrelationen kommen kann.

Während meines Aufenthalts am Collège de France und am Institut des Hautes Études Scientifiques im März und April 1974 konnte ich diese Kurven auf den Hilbertschen Modulflächen viel systematischer untersuchen. Von grosser Hilfe waren Diskussionen mit den Mathematikern am IHES, insbesondere mit G. Harder und D. Zagier. Manche der Ergebnisse und der Vermutungen wurden gemeinsam mit D. Zagier erarbeitet. Sie schliessen sich an den Mannheimer Vortrag an und wurden deshalb hier mit aufgenommen. Dabei musste ich mich auf Beweisandeutungen beschränken oder auch die Beweise weglassen: "Informal report" im Sinne der lecture notes.

Hinweis auf weitere Arbeiten:

Die Kurven  $F_N$  und  $T_N$  (vgl. § 3) hatte ich für Zwecke der Klassifikation

der Hilbertschen Modulflächen auch bereits während meines Aufenthalts in Berkeley (Sommer 1973) studiert. Man kann zum Beispiel feststellen, welche Kurven  $F_N$  in den singularitätenfreien Modellen der Hilbertschen Modulflächen  $\overline{y^2/SL_2(\mathfrak{o})}$  und  $(\overline{y^2/SL_2(\mathfrak{o})})/\tau$  (vgl. § 3) exzeptionelle Kurven werden. Mit Hilfe dieser Kurven konnte das Klassifikationsproblem für Primzahldiskriminanten, das noch unerledigt geblieben war (vgl. [4] § 0.2), abgeschlossen werden. Da ich bisher noch keine Gelegenheit hatte, das Ergebnis anzukündigen, soll das hier geschehen, um zugleich die Nützlichkeit der Kurven  $F_N$  zu illustrieren.

Es sei  $p$  eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{4}$  und  $\mathfrak{o}$  der Ring der ganzen Zahlen in  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ . Die singularitätenfreien Modelle von  $\overline{y^2/SL_2(\mathfrak{o})}/\tau$ , wo  $\tau : (z_1, z_2) \rightarrow (z_2, z_1)$  die Involution ist, sind algebraische Flächen folgenden Typs.

Rational für  $p < 193$  und  $p = 197, 229, 269, 293, 317$ .

Aufgeblasene K3-Flächen für  $p = 193, 233, 257, 277, 349, 389, 397, 461, 509$ .

Aufgeblasene (echt, "honestly") elliptische Flächen für  $p = 241, 281, 353, 373, 421, 557$ .

Allgemeiner Typ für alle anderen  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

Hierüber ist eine Arbeit geplant. Das Klassifikationsproblem kann auch für beliebige Körper-Diskriminanten  $D > 0$  und die Hilbertschen Modulflächen, die zu  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$  gehören, studiert werden. Darüber sind gemeinsame Arbeiten mit D. Zagier in Vorbereitung.

### § 1. Quadratische Formen und Klassenzahlen.

Es sei  $M$  ein freier orientierter  $\mathbb{Z}$ -Modul vom Range 2. Bezüglich einer (mit der Orientierung verträglichen)  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $M$  lassen sich die Elemente von  $M$  durch Paare  $(x, y)$  ganzer Zahlen geben, und eine quadratische Form  $S : M \rightarrow \mathbb{Z}$  lässt sich schreiben als

$$S(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

wo  $a, b, c$  ganze Zahlen sind.

Die Diskriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  von  $S$  hängt nicht von der Wahl der Basis ab. Als Diskriminanten quadratischer Formen treten die durch 4 teilbaren ganzen Zahlen sowie die Zahlen  $\equiv 1 \pmod{4}$  auf.

Die Form  $S$  ist primitiv, dann und nur dann, wenn  $(a, b, c) = 1$ .

Die Form  $S$  ist positiv-definit, dann und nur dann, wenn  $\Delta < 0$  und  $a > 0$ .

Für gegebenes  $\Delta < 0$  bezeichnen wir mit  $h(\Delta)$  die Anzahl der Isomorphieklassen primitiver positiv-definiten quadratischer Formen der Diskriminante  $\Delta$ . (Falls  $\Delta$  keine Diskriminante ist, wird  $h(\Delta)$  gleich 0 gesetzt.) Dabei heissen die Moduln  $M$  und  $M'$  mit den Formen  $S$  und  $S'$  isomorph, wenn es einen orientierungstreuen Isomorphismus  $M \rightarrow M'$  gibt, der  $S$  und  $S'$  ineinander überführt.

Für  $\Delta < 0$  setzen wir (vgl. Hurwitz [6])

$$(1) \quad H(-\Delta) = \sum_{\substack{f \in \mathbb{N} \\ f^2 | \Delta}} \hat{h}(\Delta/f^2),$$

wobei  $\hat{h}(-3) = \frac{1}{3}$ ,  $\hat{h}(-4) = \frac{1}{2}$  und sonst  $\hat{h}(\Delta) = h(\Delta)$ .

Für eine Form  $S(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$  mit  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  bestimmen wir die komplexe Zahl  $z$  in der oberen Halbebene  $\mathfrak{H}$  durch  $az^2 + bz + c = 0$ , d.h.

$$z = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \in \mathfrak{H}.$$

Die Gruppe  $SL_2(\mathbb{Z})$  ist die übliche Modulgruppe. Sie operiert auf  $\mathfrak{H}$ .

Die Isomorphieklassen positiv-definiten quadratischer Formen gegebener negativer Diskriminante stehen in eindeutiger Korrespondenz zu den Orbits derartiger Punkte  $z$  unter  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Deshalb kann man annehmen, dass  $z$  in dem Fundamentalbereich

$$\left\{ z = x + iy \mid -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1, |z| > 1 \text{ für } x < 0 \right\}$$

liegt. Daher gilt für jede natürliche Zahl  $N$  die folgende Gleichung

$$H(N) = \# \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid \begin{array}{l} -a \leq b < a, \quad c \geq a \\ c > a \text{ falls } b > 0 \\ N = 4ac - b^2 \end{array} \right\}$$

In dieser Anzahlformel ist ein Tripel  $(a, -a, a)$  mit der Vielfachheit  $\frac{1}{3}$ , ein Tripel  $(a, 0, a)$  mit der Vielfachheit  $\frac{1}{2}$  zu zählen. Diese Tripel entsprechen dem Punkt  $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$  bzw.  $z = i$  im Fundamentalbereich. In diesen Punkten ist die Isotropiegruppe der Aktion von  $SL_2(\mathbb{Z})/\{1, -1\}$  auf  $\mathcal{H}$  nicht-trivial. Sie hat die Ordnung 3 bzw. 2. Die obige Anzahlformel für  $H(N)$  gilt auch, wenn  $-N$  keine Diskriminante ist (d.h.

$N \equiv 2 \pmod{4}$  oder  $N \equiv 1 \pmod{4}$ ). Dann ist  $H(N) = 0$ .

Wenn  $p = 1$  oder eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{4}$  ist, dann führen wir folgende zahlentheoretische Funktion ein.

$$(2) \quad H_p(N) = \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z} \\ 4N - s^2 > 0 \\ 4N - s^2 \equiv 0 \pmod{p}}} H\left(\frac{4N - s^2}{p}\right) .$$

Die Hurwitzsche Klassenzahlrelation besagt [6]:

Wenn  $N$  keine Quadratzahl ist, dann gilt

$$(3) \quad H_1(N) = 2 \sum_{\substack{d|N \\ d > \sqrt{N}}} d .$$

Insbesondere ist für eine Primzahl  $q$

$$(4) \quad H_1(q) = 2q .$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} H_1(5) &= H(20) + 2H(19) + 2H(16) + 2H(11) + 2H(4) \\ &= h(-20) + 2h(-19) + 2h(-16) + 2\hat{h}(-4) + 2h(-11) \\ &\quad + 2\hat{h}(-4) \\ &= 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 = 10 . \end{aligned}$$

§ 2. Ein Beweis der Hurwitzschen Klassenzahlrelation.

Wir betrachten in der (singularitätenfreien) komplexen Fläche

$$X = \mathcal{H}_g / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{H}_g / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

die Kurve  $T_N$  ( $N > 0$ ), welche durch alle Gleichungen  $z_2 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  und  $ad - bc = N$  gegeben wird. (Hier ist  $(z_1, z_2) \in \mathcal{H}_g \times \mathcal{H}_g$ .) Die Kurve  $T_1$  ist die Diagonale von  $X$ , während die (im allgemeinen reduzible) Kurve  $T_N$  eine Hecke-Korrespondenz ist. Wenn  $N$  keine Quadratzahl ist, dann besteht  $T_N \cap T_1 \subset X$  aus endlich vielen Punkten. Was ist die Schnittzahl  $T_N \cdot T_1$  der beiden Kurven?

Satz. Die Schnittzahl  $T_N \cdot T_1$  in  $X$  ist gleich  $H_1(N)$ .

Beweisandeutung: Ein Punkt  $(z, z) \in \mathcal{H}_g \times \mathcal{H}_g$  kann nur dann einen Schnittpunkt liefern, wenn er einer ganzzahligen quadratischen Gleichung

$$(5) \quad az^2 + \beta z + \gamma = 0, \quad (a, \beta, \gamma) = 1, \quad \beta^2 - 4a\gamma = \Delta < 0$$

genügt. Bis auf  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenz gibt es genau  $h(\Delta)$  solche Punkte.

Falls wir noch  $a > 0$  verlangen, dann ist die Gleichung (5) eindeutig bestimmt. Wir betrachten den  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\mathfrak{M}$  aller ganzzahligen Matrizen

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , sodass die Gleichung  $z_2 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}$  von  $(z, z)$  erfüllt wird.

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid cz^2 - az + dz - b = 0 \right\}.$$

Da (5) die primitive Gleichung für  $z$  ist, gilt

$$c = x\alpha, \quad d - a = x\beta, \quad -b = x\gamma \quad \text{mit } x \in \mathbb{Z}.$$

Für jede Wahl von  $x$  sind  $c$  und  $b$  sowie  $d - a$  bestimmt, während  $a$  noch frei ist; wir setzen  $a = y$  und erhalten

$$ad - bc = y^2 + \beta xy + \alpha yx^2.$$

Also ist  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow ad-bc$  eine quadratische Form auf  $\mathcal{M}$ , nämlich

$$(6) \quad (x, y) \longrightarrow \alpha y x^2 + \beta x y + y^2 \quad .$$

Die Werte der Form (6) geben an, welche Kurven  $T_N$  durch  $(z, z)$  gehen.

Die Form (6) hat die Diskriminante  $\Delta$ , stellt die 1 dar und ist deshalb äquivalent zu der durch die Norm gegebenen Form auf der Ordnung  $M$  der Diskriminante  $\Delta$  im Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ . Wir können deshalb  $\mathcal{M}$  mit  $M$  identifizieren. (Bekanntlich ist  $M$  im Sinne der komplexen Multiplikation der Endomorphismenring des Torus  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}\cdot z$ .) Die auf  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}\cdot z$  effektiv operierende Gruppe mit unserer komplexen Fläche  $X$  als Orbitraum ist

$$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{1, -1\} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{1, -1\} \quad .$$

Nehmen wir zunächst an, dass  $G$  im Punkte  $(z, z)$  triviale Isotropiegruppe hat. Dies gilt dann und nur dann, wenn  $z$  nicht  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -äquivalent zu  $i$  oder zu  $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$  ist, d.h.  $\Delta \neq -4$  und  $\Delta \neq -3$ . Jedes Element  $\xi$  aus der Ordnung  $M$  definiert einen Zweig von  $T_N$  mit  $N = \mathrm{Norm}(\xi)$ , der die Diagonale  $T_1$  in  $(z, z)$  transversal schneidet. Die Zweige von  $T_N$ , die durch den durch  $(z, z)$  repräsentierten Punkt von  $T_1$  gehen, entsprechen eineindeutig den Elementen  $\xi$  aus  $M$  mit  $\mathrm{Norm}(\xi) = N$  und  $\mathrm{Im}(\xi) > 0$ , wo  $\mathrm{Im}$  den Imaginärteil der komplexen Zahl  $\xi \in M \subset \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$  bezeichnet. (Man beachte, dass  $\xi$  und  $-\xi$  den gleichen Zweig liefern und deshalb  $\mathrm{Im}(\xi) > 0$  angenommen werden darf.) Die ganze algebraische Zahl  $\xi$  mit  $\mathrm{Im}(\xi) > 0$  wird eindeutig festgelegt durch ihre Norm  $N$  und ihre Spur  $s$ . Sie liegt in der Ordnung  $M$  dann und nur dann, wenn  $s^2 - 4N = f^2\Delta$  mit einer natürlichen Zahl  $f$  gilt.

Falls die Diskriminante  $\Delta$  der Gleichung (5) gleich  $-3$  oder  $-4$  ist, dann ist die Isotropiegruppe von  $G$  zu berücksichtigen. Die Zahlen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  aus  $M$  bestimmen dann und nur dann den gleichen Zweig, wenn sie durch Multiplikation mit einer Einheit von  $M$  auseinander hervorgehen. Jetzt

ist es leicht, den Beweis für die Gleichung  $T_N \cdot T_1 = H_1(N)$  zu beenden.

Wir kompaktifizieren in bekannter Weise  $\mathcal{H}_g/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  durch Hinzufügung eines Punktes  $\infty$ . Wir setzen  $\overline{\mathcal{H}_g/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \mathcal{H}_g/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$ . Dies ist eine komplexe projektive Gerade. Die Fläche  $X$  wird kompaktifiziert zu

$$\bar{X} = \overline{\mathcal{H}_g/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \times \overline{\mathcal{H}_g/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} .$$

Es sei  $S_1 = \{\infty\} \times \overline{\mathcal{H}_g/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$  und  $S_2 = \overline{\mathcal{H}_g/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \times \{\infty\}$  .

Die Kurven  $T_N$  lassen sich abschliessen zu Kurven in  $\bar{X}$ , die wir ebenfalls mit  $T_N$  bezeichnen. Die Kurve  $T_N$  schneidet  $S_1 \cup S_2$  nur in  $(\infty, \infty)$ , und zwar werden ihre Zweige in  $(\infty, \infty)$  durch

$$(7) \quad z_2 = \frac{az_1 + b}{d}$$

mit  $a > 0$  und  $ad = N$  und  $0 \leq b < (a, d)$  gegeben. In  $(\infty, \infty)$  haben wir die lokalen holomorphen Koordinaten

$$u = e^{2\pi iz_1} , \quad v = e^{2\pi iz_2} .$$

Dann werden für feste Zahlen  $a, d$  die durch (7) gegebenen Zweige (ihre Anzahl ist gleich dem grössten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $d$ ) durch die Gleichung

$$(8) \quad u^a = v^d$$

zusammengefasst. Da  $S_1$  und  $S_2$  durch  $u = 0$  bzw.  $v = 0$  gegeben werden, gilt für den Schnitt in  $\bar{X}$

$$T_N \cdot S_1 = T_N \cdot S_2 = \sum_{d|N} d .$$

Es folgt der Satz

Satz. In  $\bar{X}$  gilt die Homologiebeziehung

$$(9) \quad T_N \sim \left( \sum_{d|N} d \right) (S_1 + S_2) .$$

Die Schnitzzahl von  $T_N$  (jetzt sei  $N$  wieder keine Quadratzahl) mit  $T_1$  im Punkte  $(\infty, \infty)$  ist wegen (8) gleich

$$\sum_{d|N} \min(d, \frac{N}{d}) = 2 \sum_{\substack{d|N \\ d < \sqrt{N}}} d .$$

Da die Schnitzzahl von  $T_N$  und  $T_1$  in  $X$  gleich  $H_1(N)$  ist, gilt für die Schnitzzahl von  $T_N$  und  $T_1$  in  $\bar{X}$  die Beziehung

$$(10) \quad (T_N \cdot T_1)_{\bar{X}} = H_1(N) + 2 \sum_{\substack{d|N \\ d < \sqrt{N}}} d .$$

Andererseits ist wegen (9)

$$(T_N \cdot T_1)_{\bar{X}} = 2 \sum_{d|N} d .$$

Damit ist die in § 1 angegebene Hurwitzsche Klassenzahlrelation bewiesen.

### § 3. Kurven in den Hilbertschen Modulflächen.

Es sei  $p$  eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{4}$ , die festgewählt wird. Wir betrachten den Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$  und in ihm den Ring  $\mathfrak{o}$  der ganzen algebraischen Zahlen

$$\mathfrak{o} = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \frac{1 + \sqrt{p}}{2} .$$

Die Gruppe  $SL_2(\mathfrak{o})$  operiert in bekannter Weise auf  $\mathfrak{h}_y \times \mathfrak{h}_y = \mathfrak{h}_y^2$  (vgl. z.B. [4]). Die (nichtkompakte) Hilbertsche Modulfläche

$$X = \mathfrak{h}_y^2 / SL_2(\mathfrak{o})$$

hat endlich viele Quotientensingularitäten, die von den Punkten auf  $\mathfrak{h}_y^2$  herrühren, in denen  $SL_2(\mathfrak{o}) / \{1, -1\}$  eine nicht-triviale Isotropiegruppe hat. Die Fläche  $X$  ist eine rationale Homologiemannigfaltigkeit.

Mit  $x \rightarrow x'$  werde der nicht-triviale Automorphismus des Körpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$

bezeichnet. Für  $a, b \in \mathbb{Z}$  und  $\lambda \in \mathfrak{o}$  betrachten wir die "schief-hermitesche" Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a\sqrt{p} & \lambda \\ -\lambda' & b\sqrt{p} \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Kurve

$$(11) \quad a\sqrt{p} z_1 z_2 - \lambda' z_1 + \lambda z_2 + b\sqrt{p} = 0$$

in  $\mathfrak{k}_y^2$ , welche für  $\det A = abp + \lambda\lambda' > 0$  nicht leer ist. Die Gleichung

(11) ist nämlich äquivalent zu

$$(12) \quad z_2 = \frac{\lambda' z_1 - b\sqrt{p}}{a\sqrt{p} z_1 + \lambda} .$$

Die Kurve ist also für  $\det A > 0$  der Graph einer gebrochen linearen Abbildung  $\mathfrak{k}_y \rightarrow \mathfrak{k}_y$ . Eine positive natürliche Zahl  $N$  lässt sich genau dann als  $\det A = abp + \lambda\lambda' = N$  schreiben, wenn  $N$  quadratischer Rest mod  $p$  ist. Wir bezeichnen in diesem Fall mit  $T_N$  die Menge aller Punkte in  $X = \mathfrak{k}_y^2 / \text{SL}_2(\mathfrak{o})$ , deren Repräsentanten  $(z_1, z_2)$  in  $\mathfrak{k}_y^2$  wenigstens einer Gleichung (11) mit  $\det A = N$  genügen. Man kann zeigen, dass  $T_N$  wirklich eine komplexe Kurve in der komplexen Fläche  $X$  ist. Die Kurve  $T_N$  ist im allgemeinen nicht irreduzibel. Betrachten wir in  $X$  nur diejenigen Punkte, die einer Gleichung (11) mit  $\det A = N$  genügen, wobei  $A$  primitiv ist (d.h. es gibt keine natürliche Zahl  $f > 1$ , sodass  $\frac{a}{f}, \frac{b}{f} \in \mathbb{Z}$  und  $\frac{\lambda}{f} \in \mathfrak{o}$ ), dann erhalten wir eine Kurve  $F_N$  in  $X$ , welche man als irreduzibel nachweisen kann. Es ist

$$(13) \quad T_N = \sum_{\substack{f \geq 1 \\ f^2 | N}} F_N / f^2 .$$

Die Kurve  $T_N$  ist analog zu der in § 2 "für  $p = 1$ " betrachteten Kurve  $T_N$ .

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall  $N \not\equiv 0 \pmod{p}$ , d.h.  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ . Die

Zahl  $N$  schreiben wir dann in der Form

$$(14) \quad N = N_1 \cdot N_2 \quad ,$$

wo  $N_1$  nur durch Primzahlen  $q$  mit  $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$  und  $N_2$  nur durch Primzahlen  $q$  mit  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$  teilbar ist. Die Zahl  $N_2$  ist gleich einer Quadratzahl multipliziert mit dem Produkt einer geraden Anzahl verschiedener Primzahlen

$$N_2 = m^2 q_1 q_2 \cdots q_{2r} \quad .$$

Die Kurve  $F_N \subset X$  ist dann Bild von  $\mathcal{H}_y/\Gamma$  unter einer Abbildung vom Grade 1, wo  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe von  $SL_2(\mathbb{R})/\{1, -1\}$  ist, welche zur Einheitengruppe einer Ordnung in der (indefiniten) Quaternionenalgebra über  $\mathbb{Q}$  isomorph ist, welche genau an den Primstellen  $q_1, q_2, \dots, q_{2r}$  verzweigt ist. Hieraus kann man schliessen:

Satz. Die Kurve  $T_N$  (mit  $N = N_1 N_2$ ) ist dann und nur dann kompakt (als Teilmenge von  $\mathcal{H}_y^2/SL_2(\mathcal{O})$ ), wenn  $N_2$  keine Quadratzahl ist, (d.h.  $r > 0$ ).

In  $\mathcal{H}_y$  (mit der komplexen Koordinate  $z = x + iy$ ) haben wir das invariante Volumenelement

$$\omega = -\frac{1}{2\pi} \frac{dx \wedge dy}{y^2} \quad ,$$

das im Sinne des Gauß-Bonnetschen Satzes normiert ist, d.h.  $\int_{\mathcal{H}_y/\Gamma} \omega$  ist gleich der Eulerschen Zahl von  $\mathcal{H}_y/\Gamma$ , falls  $\Gamma$  irgendeine diskrete Untergruppe von  $SL_2(\mathbb{R})/\{1, -1\}$  ist, welche frei auf  $\mathcal{H}_y$  operiert und kompakten Quotienten  $\mathcal{H}_y/\Gamma$  hat. Da  $F_N$  Bild eines Quotienten  $\mathcal{H}_y/\Gamma$  ist ( $\Gamma$  diskret,  $\Gamma$  operiert aber im allgemeinen nicht frei und  $\mathcal{H}_y/\Gamma$  ist im allgemeinen nicht kompakt), können wir im Sinne der Form  $\omega$  von dem Volumen von  $F_N$  und auch von den Volumen von  $T_N$  sprechen, was wir mit  $\text{vol}(T_N)$  bezeichnen.

Mit Hilfe einer von Eichler [2] durchgeführten Volumenbestimmung kann man mit einiger Mühe beweisen (für  $N \not\equiv 0 \pmod{p}$ )

$$(15) \quad \text{vol}(T_N) = -\frac{1}{6} \sum_{d|N} \left(\frac{d}{p}\right) d .$$

Führt man in  $\mathcal{H}_2^2$  die Chernsche Form

$$c_1 = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{dx_1 \wedge dy_1}{y_1^2} + \frac{dx_2 \wedge dy_2}{y_2^2} \right)$$

ein, dann ist  $2 \text{vol}(T_N)$  gleich dem Integral von  $c_1$  über  $T_N$ .

Bemerkung: Für " $p = 1$ " entspricht (15) der Formel (9) in § 2, denn  $\text{vol}(T_1) = \text{vol}(\mathcal{H}_2/\text{SL}_2(\mathbb{Z})) = -\frac{1}{6}$  und  $T_N$  ist (in § 2) in  $\bar{X}$  homolog zu einem Vielfachen von  $T_1$ , das in (9) angegeben wird, woraus man schließen kann, dass für " $p = 1$ "

$$\text{vol}(T_N) = -\frac{1}{6} \sum_{d|N} d .$$

Falls  $N$  keine Quadratzahl ist, dann schneiden sich  $T_N$  und  $T_1$  in  $X = \mathcal{H}_2^2/\text{SL}_2(\mathfrak{o})$  in endlich vielen Punkten. Die Kurve  $T_1$  ist Bild der Diagonalen von  $\mathcal{H}_2^2$  und  $\mathcal{H}_2/\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow T_1$  ist bijektiv. Auf  $T_1$  liegen zwei Quotientensingularitäten von  $X$  (der Ordnungen 2 und 3). Sie gehören zu den bekannten endlichen Untergruppen von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})/\{1, -1\} \subset \text{SL}_2(\mathfrak{o})/\{1, -1\}$  und lassen sich durch die Punkte  $(i, i)$  bzw.  $(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}))$  von  $\mathcal{H}_2^2$  repräsentieren. Die Zweige der Kurven  $T_N$  und  $T_1$  schneiden sich überall transversal. In den Quotientensingularitäten ist jeder Schnitt (im Sinne der Schnitt-Theorie auf rationalen Homologie-Mannigfaltigkeiten) mit der Vielfachheit  $\frac{1}{2}$  bzw.  $\frac{1}{3}$  zu zählen. In diesem Sinne ist die Schnittzahl  $T_N \cdot T_1$  zu verstehen. Das folgende Resultat wird genauso wie der entsprechende Satz in § 2 bewiesen.

Satz. Die Schnittzahl  $T_N \cdot T_1$  in der zur Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{4}$  gehörigen Hilbertschen Modulfläche  $X$  ist gleich  $H_p(N)$ .

Die Definition von  $H_p(N)$  wurde in (2) angegeben. Im Gegensatz zu  $p = 1$  ist  $H_p(N)$  im allgemeinen nicht ganzzahlig, aber  $6H_p(N)$  ist eine

ganze Zahl.

Die Hilbertsche Modulfläche  $X = \mathcal{H}_p^2 / \text{SL}_2(\mathfrak{o})$  lässt eine natürliche Involution  $\tau : X \rightarrow X$  zu, welche durch  $(z_1, z_2) \rightarrow (z_2, z_1)$  induziert wird. Offensichtlich ist  $\tau(T_N) = T_N$ . Wenn  $T_N$  kompakt ist, dann repräsentiert  $T_N$  eine Homologieklassse

$$[T_N] \in H_2(X; \mathbb{Q}),$$

welche unter  $\tau$  invariant ist. Es bezeichne  $\mathcal{F}$  den Unterraum von  $H_2(X; \mathbb{Q})$ , der von den Homologieklassen  $[T_N]$  der kompakten Kurven  $T_N$  erzeugt wird. Es gilt

$$(16) \quad \mathcal{F} \subset H_2(X; \mathbb{Q})^\tau \cong H_2(X/\tau; \mathbb{Q}).$$

Die zweite Bettische Zahl von  $X/\tau$ , d.h. der Rang von  $H_2(X/\tau; \mathbb{Q})$ , kann mit den Methoden von [4] berechnet werden. Wir geben hier zunächst nur an, dass

$$(17) \quad \dim_{\mathbb{Q}} H_2(X/\tau; \mathbb{Q}) = \left[ \frac{p-5}{24} \right] + 1 \quad \text{für } p < 193.$$

Die einzigen Primzahlen mit  $\dim_{\mathbb{Q}} H_2(X/\tau; \mathbb{Q}) = 1$  sind 5, 13, 17. In diesen drei Fällen ist also auch  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{F} = 1$ , und deshalb muss (für kompaktes  $T_N$ ) die Schnittzahl  $T_N \cdot T_1$  ein konstantes Vielfaches des Volumens von  $T_N$  sein. Durch Berechnung eines Beispiels lässt sich dieses Vielfache leicht bestimmen, und man erhält:

Satz. Es sei  $p = 5, 13$  oder  $17$  und  $N$  eine natürliche Zahl mit  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ , für die in der Zerlegung (14) die Zahl  $N_2$  kein Quadrat ist, dann gilt:

$$6 H_5(N) = 5 \sum_{d|N} \left(\frac{d}{5}\right) d$$

$$6 H_{13}(N) = \sum_{d|N} \left(\frac{d}{13}\right) d$$

$$6 H_{17}(N) = \frac{1}{2} \sum_{d|N} \left(\frac{d}{17}\right) d$$

Beispiel:  $p = 17, N = 42, N_1 = 2, N_2 = 21$

$$H_{17}(42) = 2 H\left(\frac{4 \cdot 42 - 10^2}{17}\right) + 2 H\left(\frac{4 \cdot 42 - 7^2}{17}\right)$$

$$= 2 H(4) + 2 H(7) = 3$$

$$\sum_{d|42} \left(\frac{d}{17}\right) d = (1 + 2)(1 - 3)(1 - 7) = 36 \quad .$$

Die Klassenzahlrelationen in dem vorstehenden Satz können auf nicht-kompaktes  $T_N$  erweitert werden, wenn man den Durchgang der kompaktifizierten Kurve durch die Auflösung der Spitze von  $\mathbb{H}^2/SL_2(\mathfrak{o})$  berücksichtigt. Für  $p = 5$  wird die Spitze nur in eine einzige Kurve aufgeblasen [4]. In diesem Fall lässt sich das Ergebnis besonders einfach formulieren.

Satz. Es sei  $N > 0$  und keine Quadratzahl. Dann gilt für  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$

$$(18) \quad 6 H_5(N) = 5 \sum_{d|N} \left(\frac{d}{5}\right) d - 6 \sum_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 + 3xy + y^2 = N}} (x + y) \quad .$$

Hierbei durchlaufen  $x, y$  alle Paare ganzer Zahlen mit den angegebenen Bedingungen. (Wenn  $T_N$  kompakt ist, dann lässt sich die Gleichung  $x^2 + 3xy + y^2 = N$  nicht lösen, es handelt sich dann um die Formel des vorstehenden Satzes.)

Wenn die natürlichen Zahlen  $N$  und  $M$  teilerfremd sind, dann lässt sich die angegebene Formel für die Schnitzzahl von  $T_N$  und  $T_1$  verallgemeinern zu einer Formel für die Schnitzzahl  $T_N \cdot T_M$ . Wir setzen dabei ferner voraus, dass  $N$  und  $M$  nicht beide Quadratzahlen sind (dann ist  $T_N \cap T_M$  eine endliche Menge) und dass  $N$  und  $M$  zu  $p$  teilerfremd sind. Es gilt dann

$$(19) \quad T_N \cdot T_M = T_{NM} \cdot T_1 = H_p(NM) \quad .$$

Die Voraussetzung, dass  $N$  und  $M$  zu  $p$  teilerfremd sind, ist wahrscheinlich überflüssig. Mit Hilfe von (19) lässt sich die Dimension von  $\mathcal{F}$  in einigen Fällen bestimmen.

Beispiel: Für  $p = 89$  schneiden wir die kompakten Kurven  $T_{21}$ ,  $T_{39}$ ,  $T_{57}$ ,  $T_{69}$ ,  $T_{91}$  mit den nicht-kompakten Kurven  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_5$ ,  $T_{11}$ ,  $T_{17}$  und fassen die Schnittzahlen in der folgenden Matrix zusammen.

6 x Schnittzahl:

	$T_{21}$	$T_{39}$	$T_{57}$	$T_{69}$	$T_{91}$
$T_1$	0	0	0	4	0
$T_2$	0	0	6	6	12
$T_5$	6	0	6	6	12
$T_{11}$	0	12	24	24	48
$T_{17}$	18	12	12	24	24

Da die Determinante der  $(4 \times 4)$ -Matrix in der linken oberen Ecke nicht verschwindet und  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{F} \leq \left[ \frac{p-5}{24} \right] + 1 = 4$  ist (vgl. (16), (17)), gilt  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{F} = 4$ . Die Homologieklassen  $[T_{21}]$ ,  $[T_{39}]$ ,  $[T_{57}]$ ,  $[T_{69}]$  bilden eine Basis des Vektorraums  $\mathcal{F}$ . Aus der Schnittmatrix liest man ferner die Homologiebeziehung

$$[T_{91}] = 2 [T_{57}]$$

ab. Man kontrolliere, dass  $\text{vol}(T_{91}) = 2 \text{vol}(T_{57})$  und z.B.

$$T_{91} \cdot T_{71} = 2 T_{57} \cdot T_{71}, \text{ d.h. } H_{89}(6461) = 2 H_{89}(4047).$$

§ 4. Bemerkungen über weitere Resultate und Vermutungen.

Wir betrachten wie in § 3 die Hilbertsche Modulfläche  $X = \mathcal{H}_g^2 / \text{SL}_2(\mathfrak{o})$  für die Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Sie kann kompaktifiziert werden durch Hinzufügung endlich vieler Spitzen zu einer komplexen Fläche  $\bar{X}$  mit endlich vielen Singularitäten (vgl. [4]). Auch auf  $\bar{X}$  operiert die Involution  $\tau$ . Der Quotient  $\bar{X}/\tau$  ist eine Fläche mit endlich vielen Singularitäten, die alle in minimaler Weise aufgelöst werden sollen. Wir erhalten dann eine reguläre singularitätenfreie algebraische Fläche, die hier mit  $V$  bezeichnet werden soll. In [4] wurde ein etwas anderes singularitätenfreies Modell für  $\bar{X}/\tau$  benutzt und  $Y^{\circ}(p)/\tau$  genannt.

Es sei  $n$  die Anzahl der irreduziblen Kurven auf  $V$ , in die die Singularitäten von  $\bar{X}/\tau$  aufgeblasen wurden. Für die 2-dimensionale Cohomologie von  $V$  betrachten wir die Hodge-Zerlegung

$$H^2(V; \mathbb{C}) = H^{2,0}(V) \oplus H^{1,1}(V) \oplus H^{0,2}(V) .$$

Mit Hilfe der Methoden von [4] kann man ausrechnen, dass

$$(20) \quad \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(V) = n + \chi(p),$$

wo  $\chi(p)$  das arithmetische Geschlecht von  $\bar{X}$  ist (vgl. [4] § 5.6 (20)).

Es sei  $\mathcal{Y}$  der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der holomorphen Spitzenformen  $a(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$  für die Gruppe  $\text{SL}_2(\mathfrak{o})$ . Es sei  $\epsilon$  die Grundeinheit für den Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$  mit  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon' < 0$ . Dann ist

$$(21) \quad a(\epsilon z_1, \epsilon' \bar{z}_2) dz_1 \wedge d\bar{z}_2 + a(\epsilon z_2, \epsilon' \bar{z}_1) dz_2 \wedge d\bar{z}_1$$

eine Form vom Typ  $(1,1)$  in  $\mathcal{H}_g \times \mathcal{H}_g$ , invariant unter der um die Involution  $\tau$  erweiterten Gruppe  $\text{SL}_2(\mathfrak{o})$ . Mit  $\gamma^{1,1}$  werde der komplexe Vektorraum bezeichnet, der von den Formen (21) sowie von der Chernschen Form  $c_1$  (siehe § 3) aufgespannt wird. Nach einer Mitteilung von Harder

kann  $\gamma^{1,1}$  in natürlicher Weise mit dem Unterraum von  $H^{1,1}(V)$  identifiziert werden, der aus allen Cohomologieklassen besteht, die auf sämtlichen Kurven, die durch die Auflösung entstanden sind, verschwinden. Es ist

$$\dim_{\mathbb{C}} \gamma^{1,1} = \dim_{\mathbb{C}} \gamma + 1 = \chi(p) .$$

Dies erklärt (20). Der Poincarésche Isomorphismus bildet  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$  (vgl. (16)) auf einen Unterraum von  $\gamma^{1,1}$  ab, der ebenfalls mit  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$  bezeichnet werde.

Auf  $\mathcal{H}^2$  haben wir die komplexe Konjugation

$$\kappa : (z_1, z_2) \longrightarrow (-\bar{z}_1, -\bar{z}_2) .$$

Der Raum  $\gamma^{1,1}$  zerfällt bezüglich  $\kappa$  in die Unterräume zu den Eigenwerten  $+1, -1$ .

$$(22) \quad \gamma^{1,1} = \gamma_+^{1,1} \oplus \gamma_-^{1,1} .$$

Der Raum  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$  ist offensichtlich in  $\gamma_-^{1,1}$  enthalten. Auch die Form  $c_1$  gehört zu  $\gamma_-^{1,1}$ . Vermöge (21) ist  $\gamma$  als Unterraum von  $\gamma^{1,1}$  anzusehen. Die Involution  $\kappa$  operiert auf  $\gamma$  (als Unterraum von  $\gamma^{1,1}$ ) in gleicher Weise wie  $\tau : (z_1, z_2) \longrightarrow (z_2, z_1)$  auf  $\gamma$  operiert. Deshalb ist

$$\dim_{\mathbb{C}} \gamma_+^{1,1} = \dim_{\mathbb{C}} \gamma_+ = \chi_{\tau}(p) - 1 .$$

Hier bezeichnet  $\chi_{\tau}(p)$  das arithmetische Geschlecht von  $V$ . Nach [4] (§ 5.6 (21)) ist

$$\chi_{\tau}(p) = \frac{1}{2} \left( \chi(p) - \left[ \frac{p-29}{24} \right] \right) ,$$

woraus folgt

$$(23) \quad \dim_{\mathbb{C}} \gamma_-^{1,1} = \dim_{\mathbb{C}} \gamma_+^{1,1} + \left[ \frac{p-5}{24} \right] + 1 .$$

Unterhaltungen mit G. Harder und D. Zagier am IHES glaube ich entnehmen zu können, dass es für die Hilbertsche Modulfläche für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}$  eine Hecke-Korrespondenz  $A_{\mathfrak{a}}$  gibt und man in  $\mathcal{Y}^{1,1}$  einen Unterraum  $U$  definieren kann, der aus allen Elementen besteht, die unter  $A_{\mathfrak{a}} - A_{\mathfrak{a}'}$  für alle  $\mathfrak{a}$  verschwinden. Es ist  $U \subset \mathcal{Y}_-^{1,1}$  und  $\mathcal{Y}_-^{1,1}/U = \mathcal{Y}_+^{1,1}$ . Dies erklärt (23) und beweist zugleich als Folge von (23), dass

$$\dim_{\mathbb{C}} U = \left[ \frac{p-5}{24} \right] + 1 .$$

Man kann ferner zeigen, dass  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C} \subset U$  und kommt so zu dem Satz.

Satz. Die Dimension des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraumes  $\mathcal{F}$ , der von den Homologieklassen der kompakten Kurven  $T_N$  erzeugt wird, ist kleiner oder gleich  $\left[ \frac{p-5}{24} \right] + 1$ .

Vermutung:  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{F} = \left[ \frac{p-5}{24} \right] + 1 .$

Diese Vermutung konnte für viele  $p$  mit Hilfe von Schnitzzahlberechnungen (vgl. § 3) bestätigt werden. So liessen sich für  $p = 193$  in der Tat 8 linear unabhängige kompakte Kurven finden, nämlich  $T_{55}, T_{65}, T_{85}, T_{95}, T_{143}, T_{185}, T_{187}, T_{209}$ .

Für jedes Element  $K \in \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$  und jede Kurve  $T_N$  (kompakt oder nicht-kompakt) ist die Schnitzzahl  $T_N \cdot K \in \mathbb{C}$  in  $X = \mathcal{Y}^2 / \text{SL}_2(\mathfrak{o})$  im homologischen Sinne erklärt. (Das Symbol "K" soll hier an kompakter Zyklus erinnern.)

Auch das Volumen von  $K$  ist durch lineare Erweiterung wohldefiniert.

Wie üblich ist  $\Gamma_{\mathfrak{o}}(p)$  die Untergruppe derjenigen Elemente  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , für die  $c \equiv 0 \pmod{p}$ .

Vermutung. Es sei  $K \in \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ . Dann ist

$$(24) \quad f(z) = \frac{1}{2} \text{vol}(K) + \sum_{\substack{N=1 \\ \left(\frac{N}{p}\right) \neq -1}}^{\infty} (T_N \cdot K) e^{2\pi i N z}$$

die Fourier-Entwicklung einer Modulform für die Gruppe  $\Gamma_0(p)$  vom Gewicht 2 und "Nebentypus", d.h.

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \left(\frac{a}{c}\right) \cdot (cz + d)^2 \cdot f(z)$$

für  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$ .

Nach Hecke hat der Raum der Modulformen für  $\Gamma_0(p)$  vom Gewicht 2 und Nebentypus die Dimension  $2\left(\left[\frac{p-5}{24}\right] + 1\right)$ . Der Unterraum der Formen, deren Fourierreihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$  verschwindende Koeffizienten  $a_n$  haben für alle  $n$  mit  $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ , hat die halbe Dimension. Es wird auch vermutet, dass die Zuordnung  $K \rightarrow f$  (siehe (24)) ein Isomorphismus von  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$  auf diesen Unterraum ist.

Ein Zusammenhang zwischen Modulformen für  $\Gamma_0(p)$  und Hilbertschen Modulformen ist wohlbekannt (vgl. [1]). Die Ergebnisse von D. Zagier [7] werden es vielleicht ermöglichen, die vorstehende Vermutung zu beweisen.

Bemerkung. Die Chernsche Differentialform  $c_1$  ist Poincaré-Dual eines Elementes  $K \in \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ . Wendet man hierauf (24) an, dann erhält man (bis auf einen konstanten Faktor) die Summe der von Hecke ([3] S. 818) angegebenen Eisenstein-Reihen  $E_1$  und  $E_2$ .

Literatur

- [1] K. Doi and H. Naganuma, On the functional equation of certain Dirichlet series, *Inventiones Math.* 9, 1-14 (1969).
- [2] M. Eichler, Über die Einheiten der Divisionsalgebren, *Math. Ann.* 114, 635-654 (1937).
- [3] E. Hecke, *Mathematische Werke*, Göttingen 1970.
- [4] F. Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, *L'Enseignement mathématique* 19, 183-281 (1973).
- [5] F. Hirzebruch and A. Van de Ven, Hilbert modular surfaces and the classification of algebraic surfaces, *Inventiones Math.* 23, 1-29 (1974).
- [6] A. Hurwitz, *Mathematische Werke*, Bd. II, Basel und Stuttgart 1963. Siehe: Über Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante (*Math. Ann.* 25 (1885)).
- [7] D. Zagier, erscheint in *C.R. Acad. Sci. Paris*.