Rüdiger Wolfrum

Der Internationale Schutz der Menschenrechte zwischen Universalität und Regionalisierung.

Jan Philipp Reemtsma

„Trauma“ – Aspekte der ambivalenten Karriere eines Konzeptes.

Friedrich E.P. Hirzebruch

Fixpunktsätze und Zahlentheorie

Dies academicus 1999
Universität Konstanz

Fixpunktsätze und Zahlentheorie

Friedrich E.P. Hirzebruch

Wir werden zunächst den Atiyah-Bott-Singerschen Fixpunktsatz ([AB68], siehe Seite 473) auf eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Fläche X anwenden.
Es sei a ein Automorphismus von X endlicher Ordnung ($\neq$ Identität). Dann hat a endlich viele Fixpunkte x und in jedem einen Drehwinkel α_x mit $0 < \alpha_x < 2\pi$. Der Automorphismus a operiert auf dem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum der holomorphen 1-Formen $H^{1,0}(X)$ (Formen 1. Gattung) durch Liftung. Nach ABS gilt für die Spur von $\vec{a}$, die mit $\chi(a)$ bezeichnet werde und auch Charakter genannt wird,

$$\chi(a) - \overline{\chi(a)} = i \sum_{\substack{x \in X \\ ax = x}} \cot \frac{\alpha_x}{2}. \tag{1}$$

(In [AB68] steht $-i$ statt i; unsere Bezeichnungen sind ein wenig anders.)
Nach dem Lefschetzschen Fixpunkt der Topologie ist

$$\chi(a) + \overline{\chi(a)} = 2 - \text{ Anzahl der Fixpunkte}, \tag{2}$$

sodaß wir also $\chi(a)$ berechnen können.

Beispiel:
Betrachte das Gitter $\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ in $\mathbb{C}$ (Koordinate z) und den Automorphismus a der Ordnung 4 auf dem Torus $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})$ gegeben durch die Multiplikation mit i. Es gibt zwei Fixpunkte repräsentiert durch 0 und $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ beide mit dem Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$. Also ist

$$\begin{aligned}
\chi(a) - \overline{\chi(a)} &= 2i \cot \frac{\pi}{4} = 2i \\
\chi(a) + \overline{\chi(a)} &= 0 \\
\chi(a) &= i,
\end{aligned}$$

was mit $a^* \, dz = i \, dz$ übereinstimmt.

Für die folgenden Überlegungen, die zu einem Satz von HECKE (1928) führen werden, vgl. [Wei80] und die dort angegebene Literatur (z.B. E. HECKE, Mathematische Werke).
Wir machen die folgende fundamentale Annahme, ohne uns zunächst darum zu kümmern, ob sie realisiert werden kann.

(∗) Es sei p eine ungerade Primzahl und a ein Automorphismus von X der Ordnung p mit $\frac{p-1}{2}$ Fixpunkten mit den Drehwinkeln $2\pi\frac{k}{p}$, wo $1 \leqq k \leqq p-1$ und k quadratischer Rest modulo p ist, d.h. $\left(\frac{k}{p}\right) = 1$.

Die Annahme (∗) impliziert

$$(**) \qquad \begin{aligned} \chi(a) - \overline{\chi(a)} &= i \sum_{\substack{1 \leqq k \leqq p-1 \\ (\frac{k}{p})=1}} \cot \pi \frac{k}{p} \\ \chi(a) + \overline{\chi(a)} &= -\frac{p-5}{2} \end{aligned}$$

Zunächst betrachten wir den Fall $p \equiv 1 \mod 4$.
Dann ist $\chi(a) - \overline{\chi(a)} = 0$, da -1 quadratischer Rest ist, und

$$(3) \qquad \chi(a) = -\frac{p-5}{4}, \quad (\text{falls } (*) \text{ gilt und } p \equiv 1 \mod 4).$$

Für $p = 3$ wäre

$$\chi(a) - \overline{\chi(a)} = i \cot \frac{\pi}{3} = \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Das ist unmöglich, weil $\chi(a)$ eine ganze algebraische Zahl ist. Wir setzen jetzt voraus $p \equiv 3 \mod 4$ und $p > 3$. Dann ist nach Gauß

$$(4) \qquad \sum_{\substack{1 \leqq k \leqq p-1 \\ (\frac{k}{p})=1}} \cot \pi \frac{k}{p} = \sqrt{p}\, h(-p),$$

wo $h(-p)$ die Klassenzahl des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ der Diskriminante $-p$ ist.
Verwendet man die Formel

$$(5) \qquad \pi \cot \pi z = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$$

mit der Summation, die die Summanden für n und $-n$ zusammenfaßt, dann kann man zeigen, daß (4) zu folgender Formel äquivalent ist.

$$(6) \qquad \sum_{k>0} \left(\frac{k}{p}\right) \frac{1}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{p}} h(-p)$$

Vgl. z.B. das schöne Buch [Zag81].
Wegen (∗∗) und (4) ist

$$(7) \qquad \chi(a) = \frac{1}{2}\Big(-\frac{p-5}{2} + i\sqrt{p}\, h(-p)\Big),$$

eine Formel, die auch für $p \equiv 1 \mod 4$ gilt, falls man $h(-p) = 0$ setzt, da $-p$ keine Diskriminante ist.
Kann die fundamentale Annahme (∗) realisiert werden? Die Antwort ist ja für $p > 3$.
Betrachte die Modulgruppe $PSL_2(\mathbb{Z})$, die mit Γ bezeichnet werde. Sie operiert durch gebrochen lineare Abbildungen

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.
Die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(p)$ besteht aus allen ganzzahligen unimodularen Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, die modulo p gleich der Einheitsmatrix sind. Die Gruppe $\Gamma(p)$ operiert frei auf $\mathbb{H}$ (für $p > 3$).
Wir erhalten die nicht-kompakte Riemannsche Fläche $\Gamma(p)\backslash\mathbb{H}$, welche $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ überlagert. Die Galoisgruppe der Überlagerungen ist

$$PSL_2(\mathbb{F}_p) = \Gamma/\Gamma(p),$$

der Ordnung $N = \frac{1}{2}p(p^2-1)$. Die Riemannsche Fläche $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ kann mit $\mathbb{C}$ identifiziert werden. Sie hat zwei ausgezeichnete Punkte, da Γ auf $\mathbb{H}$ nicht frei operiert (Fixpunkte der Ordnung 2 und 3 repräsentiert durch i und $\rho = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$). Die Überlagerung

$$\Gamma(p)\backslash\mathbb{H} \longrightarrow \Gamma\backslash\mathbb{H}$$

ist über den beiden ausgezeichneten Punkten verzweigt und hat dort $\frac{N}{2}$ bzw. $\frac{N}{3}$ Urbilder. Wir erhalten für die Eulersche Charakteristik

$$e\big(\Gamma(p)\backslash\mathbb{H}\big) = -N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3} = -\frac{N}{6} = -\frac{1}{12}p(p^2-1).$$

Die Riemannsche Fläche $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ kann durch Hinzufügung einer Spitze zur Riemannschen Zahlenkugel S^2 kompaktifiziert werden. Die Fläche $\Gamma(p)\backslash\mathbb{H}$ wird durch Hinzufügung von $\frac{N}{p}$ Spitzen zu einer kompakten Fläche $X(p)$, auf der $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ operiert mit S^2 als Orbitraum. Die Isotropiegruppe einer Spitze ist zyklisch von der Ordnung p. Wir zeichnen die Spitze $i\infty$ aus mit der durch $a\colon z \longmapsto z+1$ erzeugten Isotropiegruppe. Die Aktion von $PSL_2(\mathbb{F}_2)$ auf $X(p)$ hat drei Ausnahmeorbiten der Ordnungen $N/2$, $N/3$, N/p. Die Eulersche Charakteristik von $X(p)$ ist

$$e\big(X(p)\big) = -\frac{1}{12}p(p^2-1) + \frac{1}{2}(p^2-1).$$

Das Geschlecht g ist gleich der Dimension von $H^{1,0}(X(p))$ mit

$$2-2g = e\big(X(p)\big).$$

Es ist $g = 0, 3, 26, \ldots$ für $p = 5, 7, 11, \ldots$
Das erwähnte Element a der Ordnung p erzeugt eine zyklische Gruppe U, die bei der Aktion auf den $\frac{1}{2}(p^2-1)$ Spitzen $\frac{p-1}{2}$ Fixpunkte und $\frac{p-1}{2}$ Orbiten mit p Elementen (zyklische Vertauschung) hat.
Die Spitzen entsprechen den Nebenklassen $PSL_2(\mathbb{F}_p)/U$, die Fixpunkte den Nebenklassen $N(U)/U$, wo $N(U)$ der Normalisator

von U ist, der aus allen Abbildungen $z \longmapsto az+b$ besteht mit a quadratischer Rest modulo p. Der Quotient $PSL_2(\mathbb{F}_p)/N(U)$ ist die projektive Gerade $\mathbb{F}_p \cup \infty$, auf der $a\colon z \longmapsto z+1$ mit ∞ als einzigem Fixpunkt operiert und $\mathbb{F}_p$ zyklisch vertauscht. Jeder Punkt der projektiven Geraden repräsentiert $\frac{p-1}{2}$ Spitzen. Betrachte als Beispiel $p = 5$. Dann ist $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ die Automorphismengruppe A_5 des Ikosaeders. Die 12 Eckpunkte entsprechen den 12 Spitzen. Für das Element $a\colon z \longmapsto z+1$ ist die fundamentale Annahme $(*)$ realisiert. Man kontrolliert nämlich, daß die Drehwinkel in den $\frac{p-1}{2}$ Fixpunkten gleich $2\pi\frac{k}{p}$ sind mit k quadratischer Rest modulo p.
Es soll nun für $p \equiv 3\ (4)$ die Darstellung von $PSL_2(\mathbb{F}_2)$ auf $H^{1,0}(X(p))$ untersucht werden. Da für das Liften von Differentialformen unter Automorphismen a, b gilt $(ab)^* = b^*a^*$ können wir zur transponierten Darstellung übergehen, um einen Homomorphismus

$$(8) \qquad PLS_2(\mathbb{F}_p) \longrightarrow \operatorname{End} H^{1,0}(X(p))$$

zu bekommen.
Nach F. G. Frobenius und I. Schur sind die irreduziblen Darstellungen von $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ für $p \equiv 3\ (4)$ wie folgt zu klassifizieren. Es gibt die triviale Darstellung vom Grade 1, die Darstellung vom Grade p, die aus der Permutationsdarstellung auf der projektiven Geraden über $\mathbb{F}_p$ durch Abspaltung der trivialen Darstellung hervorgeht, es gibt jeweils $\frac{1}{4}(p-3)$ Darstellungen vom Grade $p-1$ und $p+1$, alle bisher erwähnten Darstellungen sind reell, es gibt schließlich zwei zueinander konjugierte Darstellungen χ^+, χ^- vom Grade $\frac{1}{2}(p-1)$ mit

$$(9) \qquad \chi^+(a) = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{p}), \quad \chi^-(a) = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{p}).$$

Dies sind die Spuren für das erwähnte Element

$$a\colon z \longmapsto z+1, \quad a \in PSL_2(\mathbb{F}_p).$$

Es ist interessant, an die Gaußschen Summen zu erinnern:

$$\chi^+(a) = \sum_{\substack{1\le k\le p-1\\ (\frac{k}{p})=1}} \alpha^k, \quad \text{wobei } \alpha = e^{2\pi i/p},$$

und

$$\chi^-(a) = \sum_{\substack{1\le k\le p-1\\ (\frac{k}{p})=-1}} \alpha^k = \overline{\chi^+(a)}$$

und daß dies die Beschränkung der Darstellungen χ^+, χ^- auf die von a erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung p charakterisiert. Es seien m und n die Multiplizitäten von χ^+, χ^- in der Darstellung (8).

1 Satz von Hecke *Es sei $p > 3$ und $p \equiv 3$ (4), dann gilt für die Multiplizitäten m, n*

$$m - n = h(-p). \tag{10}$$

Dies folgt unmittelbar aus (7) und (9). Man kann übrigens auch $m+n$ ausrechnen:

$$m+n = \frac{1}{2}\Big(\frac{p-1}{6} + (-1)^{\frac{p+1}{4}} + \frac{4}{3} \quad (\text{falls } p \equiv 2\ (3))\Big).$$

Es gibt bekanntlich genau 7 Primzahlen $p \equiv 3$ (4) mit $h(-p) = 1$, nämlich $3, 7, 11, 19, 43, 67, 163$ (Heegner 1952, Stark).

p	m	n
7	1	0
11	1	0
19	1	0
43	2	1
67	3	2
163	7	6

Komplexe Dimension Zwei

Vorläufiger Bericht (mit Don Zagier in Vorbereitung)

Wir betrachten eine kompakte kählersche Fläche X, zum Beispiel eine projektive algebraische Fläche. Es gibt zwei fundamentale topologische Invarianten, die Eulersche Charakteristik $e(X)$ und die Signatur $\operatorname{sign}(X)$. Ist a ein Automorphismus von X, dann sind die äquivariante Eulersche Charakteristik $e(X, a)$ und die äquivariante Signatur $\operatorname{sign}(X, a)$ wohldefiniert [AB68]. Falls a endlicher Ordnung ist und isolierte Fixpunkte hat, gilt

$$\begin{aligned} e(X,a) &= \text{Anzahl der Fixpunkte von } a \\ \operatorname{sign}(X,a) &= -\sum_{\substack{x\in X\\ ax=x}} \cot\frac{\alpha_x}{2}\cot\frac{\beta_x}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Beachte, daß in (1) die äquivariante Signatur im 1-dimensionalen Fall, die für $a =$ Identität verschwindet, angegeben wird.

Die erste Formel in (11) ist der klassische Lefschetzsche Fixpunktsatz, die zweite ist der ABS-Fixpunktsatz für die Signatur. Dort sind α_x, β_x natürlich die Drehwinkel im Fixpunkt x von a. Vgl. [Hir71] und [HZ74].

Bekanntlich ist $\frac{1}{4}\big(e(X) + \operatorname{sign}(X)\big)$ das arithmetische Geschlecht von X. Diese Tatsache können wir auch äquivariant benutzen. Sie führt zu einer Formel für den Charakter $\chi(a)$ der Operation von a im Vektorraum $H^{2,0}(X)$ der holomorphen 2-Formen auf X, sofern wir folgende Voraussetzung machen.

Annahme 1: Die erste Bettische Zahl von X verschwindet. Die Darstellung von a in $H^{2,0}(X)$ ist reell, d.h. äquivalent zu der konjugiert komplexen Darstellung in $\overline{H^{2,0}(X)}$.

Das Verschwinden der ersten Bettischen Zahl impliziert, daß das arithmetische Geschlecht gleich $1+\dim H^{2,0}(X)$ ist. Weil die Darstellung reell ist, bekommen wir ferner

$$1+\chi(a)=\frac{1}{4}\big(e(X,a)+\operatorname{sign}(X,a)\big)=\frac{1}{4}\sum_{\substack{x\in X\\ ax=x}}\Big(1-\cot\frac{\alpha_x}{2}\cot\frac{\beta_x}{2}\Big).$$

Wir machen jetzt analog zu $(*)$ im 1-dimensionalen Fall neben Annahme 1 die folgende Annahme, die wir allerdings nur in besonderen Fällen werden realisieren können.

Annahme 2: Es sei p eine ungerade Primzahl >3 und a ein Automorphismus von X der Ordnung p mit $\frac{p-1}{2}$ Fixpunkten mit den Drehwinkeln $2\pi\frac{k}{p}, -2\pi\frac{kd}{p}$, wo $1\leqq k\leqq p-1$ und k quadratischer Rest modulo p ist. Dabei ist d eine fest vorgegebene teilerfremde Restklasse modulo p.

Die Annahmen 1 und 2 implizieren

$$(12)\qquad 1+\chi(a)\;=\;\frac{1}{4}\Big(\frac{p-1}{2}+\sum_{\substack{1\leqq k\leqq p-1\\ (\frac{k}{p})=1}}\cot\frac{\pi k}{p}\cot\frac{\pi kd}{p}\Big).$$

Die Kotangentensumme liegt im Körper der p-ten Einheitswurzeln und zwar im quadratischen Teilkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ für $p\equiv 3\ (4)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ für $p\equiv 1\ (4)$. Dies sieht man mit Galoistheorie: Die Summe bleibt unverändert, wenn jedes k durch rk ersetzt wird, wo r ein quadratischer Rest modulo p ist.
Für $p\equiv 3 \mod 4$ ist -1 quadratischer Nichtrest. Deshalb bleibt die Kotangentensumme unter dem Galois-Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ fest und liegt in $\mathbb{Q}$, was ohnehin klar ist, da die Summe reell ist. Es gilt

$$(13)\qquad 1+\chi(a)\;=\;\frac{1}{8}\Big(p-1+\sum_{1\leqq k\leqq p-1}\cot\frac{\pi k}{p}\cot\frac{\pi kd}{p}\Big).$$

Hier tritt die gewöhnliche Dedekindsche Summe auf:

$$\operatorname{ded}(p,d)\;=\;\sum_{1\leqq k\leqq p-1}\cot\frac{\pi k}{p}\cot\frac{\pi kd}{p}$$

(siehe [Hir71], [HZ74]). Der Ausdruck auf der rechten Seite von (13) ist eine halbganze Zahl und ganzzahlig genau dann, wenn d quadratischer Rest modulo p ist ([Hir71], Seite 39). Der Charakter muß ganzzahlig sein. Wir kommen nicht zu Widersprüchen zu unseren Annahmen, wenn wir auch noch $(\frac{d}{p})=1$ voraussetzen.
Für $p\equiv 1\ (4)$ ist $\chi(a)$ von der Form

$$\chi(a)\;=\;\frac{u+v\sqrt{p}}{2}.$$

Auf Grund unserer Annahmen ist $\chi(a)$ eine ganze Zahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Deshalb:

$$u,v\in\mathbb{Z}\quad\text{und}\quad u\equiv v \text{ modulo } 2.$$

Der Galois-Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ werde mit $\rho\longmapsto\widetilde{\rho}$ bezeichnet $\big(\rho\in\mathbb{Q}(\sqrt{p})\big)$. Dann ist nach (12)

$$(14)\qquad 2+\chi(a)+\widetilde{\chi(a)}\;=\;2+u\;=\;\frac{1}{4}\big(p-1+\operatorname{ded}(p,d)\big)$$

während

(15)

$$v=\chi(a)-\widetilde{\chi(a)}=\frac{1}{4\sqrt{p}}\sum_{1\leqq k\leqq p-1}\Big(\frac{k}{p}\Big)\cot\frac{\pi k}{p}\cot\frac{\pi kd}{p}\underset{\text{DEF}}{=}f(p,d).$$

Man kann zeigen, daß (14) und (15) für $p>5$ für u,v ganze Zahlen mit $u\equiv v$ modulo 2 liefern. Für $p>5$ und $p\equiv 1\ (4)$ führen unsere Annahmen also nicht zum Widerspruch. Die beiden Zahlen u,v sind gerade genau dann, wenn $(\frac{d}{p})=1$. Für $p=5$ ist $f(p,1)=\frac{2}{5}$ und $f(p,2)=\frac{1}{5}$ und ferner $\operatorname{ded}(p,1)=-4$ und $\operatorname{ded}(p,2)=0$.

Wir sind zur Einführung der getwisteten Dedekindschen Summen $f(p,d)$ gekommen, die sehr interessante Eigenschaften haben, zum Beispiel (für $p \equiv 1$ (4)):

$$\begin{aligned}
f(p,1) &= \frac{2}{5} \sum_{\substack{1 \leq r < \sqrt{p} \\ r \in \mathbb{Z}}} \sigma_1\left(\frac{p-r^2}{4}\right) \\
f(p,1) - 2f(p,2) &= 0 \\
f(p,1) - 3f(p,3) &= \frac{1}{2} h(-3p) \\
f(p,1) - 4f(p,4) &= h(-4p) \\
f(p,1) - 6f(p,6) &= 5h(-3p) \text{ für } p \equiv 1 \mod 8 \\
&= -h(-3p) \text{ für } p \equiv 5 \mod 8 \\
f(p,1) - 8f(p,8) &= 3h(-4p) + 2h(-8p) \text{ für } p \equiv 1 \mod 8 \\
&= -h(-4p) + 2h(-8p) \text{ für } p \equiv 5 \mod 8
\end{aligned}$$

Die erste Formel hängt mit dem Wert der Dedekindschen Zetafunktion des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ an der Stelle 2 zusammen (vgl. [Hir73], Seite 192), was sich mit Hilfe der Formel (5) sehen läßt. Die übrigen Formeln werden mit Hilfe von (5) und Formeln vom Typ (6) bewiesen.

Natürlich möchten wir Beispiele haben von Flächen X mit einer Aktion von $PSL_2(\mathbb{F}_p)$, sodaß die Aktion von $a \in PSL_2(\mathbb{F}_p)$ mit $a\colon z \longmapsto z+1$ unsere beiden Annahmen erfüllt. Ohnehin sind für $p \equiv 1$ (4) alle Darstellungen reell. Es gibt irreduzible Darstellungen von den Geraden $1, p, p-1, p+1$ und zwei Ausnahmedarstellungen χ^+, χ^- vom Grade $\frac{p+1}{2}$ mit

$$\chi^+(a) = \frac{1+\sqrt{p}}{2}, \quad \chi^-(a) = \frac{1-\sqrt{p}}{2}.$$

Wieder sind die Gaußschen Summen interessant. Zum Beispiel ist

$$\chi^+(a) = 1 + \sum_{\substack{1 \leq k \leq p-1 \\ (\frac{k}{p})=1}} \alpha^k, \quad \text{wobei } \alpha = e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

Alle irreduziblen Darstellungen, abgesehen von χ^+, χ^- haben in a einen Charakterwert in $\mathbb{Z}$. Für die Multiplizitäten von χ^+ und χ^- in der Darstellung von $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ auf $H^{2,0}(X)$ gilt

(16) $$m - n = f(p,d)$$

Mit Hilfe der Kongruenzuntergruppen zu den Hilbertschen Modulgruppen für reell-quadratische Zahlkörper ergeben sich viele Beispiele, allerdings im allgemeinen nicht mit unseren einfachen Annahmen. Es existiert eine allgemeine Theorie ([MS79] und die dort zitierte Arbeit von H. SAITO). In [MS79] kommen die getwisteten Dedekindschen Summen nur implizit vor. Wir möchten die Theorie dieser Summen unabhängig entwickeln und dabei auch neue Eigenschaften der gewöhnlichen Dedekindschen Summe herausarbeiten. Für die Theorie der Hilbertschen Modulflächen siehe [Hir73] und [Gee87].

Beispiel mit Erfüllung der Annahmen 1 und 2:

Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und den Ring der ganzen Zahlen

$$O = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Die Hilbertsche Modulgruppe $\Gamma = PSL_2(O)$ operiert auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$: $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(z_1, z_2) = \left(\frac{az_1+b}{cz_1+d}, \frac{a'z_2+b'}{c'z_2+d'}\right)$, wo mit $x \longmapsto x'$ der Galois-Automorphismus von K bezeichnet wird. Die Fläche ${}_\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ hat sechs Quotientensingularitäten, jeweils 2 der Ordnungen $2, 3, 5$. Die Primzahlen $p \equiv \pm 1$ (5) lassen sich aufspalten

$$p = \pi\pi' \quad \text{mit } \pi > 0,$$

wo (π) ein Primideal mit $O/_{(\pi)} = \mathbb{F}_p$ ist. Nun sei $\Gamma(\pi)$ die Hauptkongruenzuntergruppe der Matrizen in $SL_2(O)$, die modulo π gleich der Einheitsmatrix sind.
Die Untergruppe $\Gamma(\pi)$ von Γ operiert frei auf $\mathbb{H}^2$. Wir haben die Galois-Überlagerung

(17) $$\Gamma(\pi)\backslash\mathbb{H}^2 \longrightarrow {}_\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$$

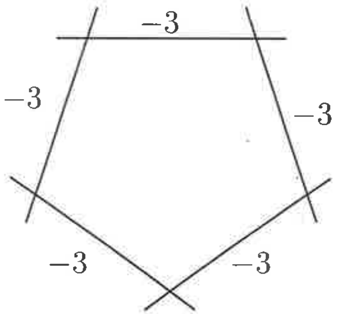
mit Gruppe $PSL_2(\mathbb{F}_p)$. Bei der Aktion dieser Gruppe auf $\Gamma(\pi)\backslash\mathbb{H}^2$ haben nur die Elemente der Ordnungen $2, 3, 5$ Fixpunkte.

Wir müssen nun zu den kompaktifizierten Flächen übergehen und zwar betrachten wir sofort die Auflösung der Spitzensingularitäten:

Die Fläche $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ wird kompaktifiziert durch Hinzufügung einer rationalen Kurve mit Doppelpunkt. Darüber liegt gemäß (17) die Kompaktifizierung von $\Gamma(\pi)\backslash\mathbb{H}^2$ durch $\frac{p^2-1}{2}$ glatte rationale Kurven der Selbstschnittzahl -3, die sich den Punkten der projektiven Geraden $P_1(\mathbb{F}_p)$ entsprechend in $p+1$ mal $\frac{p-1}{2}$ Kurven aufteilen. Die $\frac{p-1}{2}$ Kurven bilden jeweils $\frac{p-1}{2}/t$ Zyklen von t Kurven, wo t wie folgt bestimmt wird.

Die Grundeinheit $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ebenso $\varepsilon^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ können als Restklasse modulo p angesehen werden, da $\sqrt{5}$ in $\mathbb{F}_p$ existiert (wähle eine Wurzel). Die Ordnung t von ε^2 in $\mathbb{F}_p^*$ ist ein Teiler von $\frac{p-1}{2}$. Für $p = 11$ ist $t = 5$ ($\varepsilon^2 \equiv 5 \mod 11$).

Wir haben also 12 Zyklen



(Die Selbstschnittzahl -3 wurde in das Diagramm eingetragen.)

von insgesamt 60 Kurven.

Das Element $a\colon z \longmapsto z+1$ von $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ vertauscht p Punkte von $P_1(\mathbb{F}_p)$ zyklisch, der Punkt ∞ bleibt fest, zu ihm gehören $\frac{p-1}{2}$ Kurven, die in Zyklen angeordnet sind. Sie haben $\frac{p-1}{2}$ Schnittpunkte. Dies sind die Fixpunkte von a. Unsere Annahmen 1 und 2 sind erfüllt und zwar mit $d = \varepsilon^2$ modulo p.

Es läßt sich zeigen, daß

(18) $$\operatorname{ded}(p, \varepsilon^2) = 1 - p \quad \text{für } p \equiv \pm 1\ (5),$$

zum Beispiel ist $\operatorname{ded}(11, 5) = -10$. Damit ergibt sich aus (13), (14), (15), (16) zusammenfassend der folgende

2 Satz *Es sei $p \equiv \pm 1$ (5) und $X(p)$ die kompakte glatte Hilbertsche Modulfläche für die Kongruenzuntergruppe $\Gamma(\pi)$ der Hilbertschen Modulgruppe Γ zum Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Hier ist $p = \pi\pi'$ (mit $\pi > 0$) und (π) Primideal der Norm p. Die Gruppe $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ operiert auf $X(p)$ und damit auf $H^{2,0}(X(p))$, dem Raum der holomorphen 2-Formen auf $X(p)$ (Spitzenformen zu $\Gamma(\pi)$ vom Gewicht 2). Der Charakter von $a\colon z \longmapsto z+1$ bei dieser Operation ist*

(19) $$\chi(a) = -1 + \frac{f(p,d)}{2}\sqrt{p},$$

wo $d = \varepsilon^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ modulo p. Hier ist $f(p,d) = 0$, falls $p \equiv 3$ (4). Für die Multiplizitäten m, n von χ^+, χ^- in der Darstellung von $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ ist

$$m - n = f(p,d)$$

Aus [MS79] und der dort benutzten Arbeit von H. Saito entnehmen wir für $p \equiv \pm 1 \mod 5$ und $p \equiv 1 \mod 4$, daß $f(p, \varepsilon^2)$ für $(\frac{\varepsilon}{p}) = 1$ verschwindet und für $(\frac{\varepsilon}{p}) = -1$ den Wert hat

$$f(p, \varepsilon^2) = -2h\big(\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-\pi})\big).$$

Also ist $\frac{1}{2}|m-n|$ die Klassenzahl eines biquadratischen Zahlkörpers.

Für $p = 41, 61, 109, 149, 241, 269, 281, 389$ ist der Wert dieser Klassenzahl $1, 1, 1, 1, 3, 1, 3, 1$.

Aus (19) folgt für $p \equiv \pm 1 \mod 5$, falls $f(p, \varepsilon^2) = 0$, daß die Darstellung der von a erzeugten zyklischen Gruppe p auf $H^{2,0}(X(p))$

(vermehrt um die 1-dimensionale triviale Darstellung) besteht aus der direkten Summe von $\frac{p^2-1}{120}$ zyklischen Permutationsdarstellungen von p Elementen. Hierbei müssen wir noch beachten, daß für das arithmetische Geschlecht gilt

$$1+\dim H^{2,0}(X(p)) \;=\; p\,\frac{p^2-1}{120}.$$

(Siehe [Hir73]. Man muß das Euler-Volumen von $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ (gleich $\frac{1}{15}$) mit der Ordnung von $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ multiplizieren, erhält die Eulersche Charakteristik von $\Gamma(\pi)\backslash\mathbb{H}^2$, die man durch 4 teilen muß, um das arithmetische Geschlecht von $X(p)$ zu bekommen.) Man kann übrigens zeigen, daß für $f(p,\varepsilon^2)=0$ die Darstellung von $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ auf $H^{2,0}(X(p))$ (vermehrt um die 1-dimensionale triviale Darstellung) äquivalent ist zur Permutationsdarstellung von $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ auf der Menge der Nebenklassen $PSL_2(\mathbb{F}_p)/A_5$, wo man irgendeine Einbettung $A_5 \longrightarrow PSL_2(\mathbb{F}_p)$ benutzt.

Literatur

[AB68] M. F. Atiyah and R. Bott. A Lefschetz fixed-point formula for elliptic complexes: II. Applications. *Ann. of Math. 88*, pages 451–491, 1968.

[Gee87] G. van der Geer. *Hilbert Modular Surfaces*, volume 16 of *Erg. der Math. 3. Folge.* Springer-Verlag, 1987.

[Hir71] F. Hirzebruch. *The Signature Theorem: Reminiscenses and Recreation.* Number 70 in Prospects in Mathematics, Ann. of Math. Studies, pages 3–31. Princeton University Press, 1971.

[Hir73] F. Hirzebruch. Hilbert modular surfaces. *L'Enseignement mathématique 19*, pages 183–281, 1973.

[HZ74] F. Hirzebruch and D. Zagier. *The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory.* Number 3 in Math. Lecture Series. Publish or Perish, Inc., 1974.

[MS79] W. Meyer and R. Sczech. Über eine topologische und zahlentheoretische Anwendung von Hirzebruchs Spitzenauflösung. *Math. Ann. 240*, pages 69–96, 1979.

[Wei80] St. H. Weintraub. $PSL_2(\mathbb{Z}_p)$ and the Atiyah-Bott fixed-point theorem. *Houston Journal of Math. 6*, pages 427–430, 1980.

[Zag81] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper.* Springer-Verlag, 1981.