Kombinatorik in der Geometrie

Friedrich Hirzebruch

In: Jahrbuch der Heidelberger Akademie der Wissenschaften für 1991, Heidelberg, 1992, 96–98.

Die wichtigsten Eigenschaften der Euler-Poincaréschen Charakteristik eines topologischen Raumes werden erläutert. Als Beispiel des Lefschetzschen Fixpunktsatzes wird folgender Satz angegeben: Wenn die Kreislinie auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit differenzierbar operiert, und zwar mit isolierten Fixpunkten, dann ist die Charakreristik der Mannigfaltigkeit gleich der Anzahl der Fixpunkte. Die Fahnenmannigfaltigkeit $F(n)$ des n-dimensionalen komplexen Vektorraumes besteht aus allen Fahnen, das sind n-tupel 1-dimensionaler komplexer Unterräume, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. Die Drehung, die in den 1-dimensionalen Unterräumen einer festen Fahne um die Winkel $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \cdots, n\alpha$ dreht, läßt diese Fahne und alle Fahnen, die durch Vertauschung der 1-dimensionalen Unterräume entstehen, fest. Keine anderen Fahnen werden festgehalten. Deshalb ist die Charakteristik von $F(n)$ gleich $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ der Ordnung der symmetrischen Gruppe S_n von n Objekten. Hiermit ist das Studium der Gruppe S_n aller Permutationen von $\{1, 2, \cdots, n\}$ in Kombinatorik und Geometrie motiviert, das nun in verschiedenen Richtungen weiter verfolgt wird. So läßt sich die $(2r)$-te Bettische Zahl von $F(n)$ angeben als die Anzahl der Permutationen σ, für die es genau r Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\sigma(j) > \sigma(i)$ gibt. Die Bettischen Zahlen in den ungeraden Dimensionen verschwinden. Die Fixpunkte induzieren eine Zellenzerlegung von $F(n)$ in geradedimensionale Zellen.

Hauptanliegen des Vortrags ist, die Eulerschen Polynome

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} W_{n,k}\ z^k$$

in Erinnerung zu rufen. Hier ist $W_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen σ von $\{1, 2, \cdots, n\}$ mit k Abstiegen, d.h. die Ungleichung $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ gilt für genau k Werte von i (wobei $1 \leq i \leq n$). Es gilt auch folgendes: $W_{n,k}$ gibt an, auf wieviel verschiedene Weisen man n Türme auf ein $n \times n$ Schachbrett stellen kann, so daß keiner einen anderen schlägt und sich genau k unterhalb der Hauptdiagonale befinden. Es ist

$$\begin{aligned} &P_1(z) = 1\,, \quad P_2(z) = 1 + z\,, \quad P_3(z) = 1 + 4z + z^2 \\ &P_4(z) = 1 + 11z + 11z^2 + z^3\,, \quad P_5(z) = 1 + 26z + 66z^2 + 26z^3 + z^4\,. \end{aligned}$$

Die Eulerschen Polynome werden auch durch folgende Identität charakterisiert

$$\frac{zP_n(z)}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^n\ z^k$$

Sie sind mir u.a. in folgenden Zusammenhängen begegnet.

Es gibt interessante algebraische Varietäten der komplexen Dimension $n-1$, deren holomorphe Euler-Charakteristiken bis auf das Vorzeichen gleich den $W_{n,k}$ sind: Es sei A eine prinzipal polarisierte n-dimensionale abelsche Varietät. Ein zur Polarisierung gehöriger Thetadivisor D in A hat die komplexe Dimension $n-1$, ist der einzige Divisor in seiner linearen Äquivalenzklasse und kann in A durch die Aktion von A auf sich bewegt werden. Im allgemeinen ist D glatt, und man kann für $0 \leq k \leq n-1$ die holomorphe Euler-Charakteristik von D mit Koeffizienten in der Garbe der Keime holomorpher k-Formen bilden. Sie werde mit $\chi^k(D)$ bezeichnet. Eine Rechnung im Sinne meines Riemann-Roch-Satzes, die man in dieser Weise immer durchführen kann, wenn das Tangentialbündel der Varietät plus ein Geradenbündel trivial ist, ergibt

$$(-1)^{n-1-k}\ \chi^k(D) = W_{n,k}\,.$$

Das arithmetische Geschlecht $\chi^0(D)$ ist also gleich $(-1)^{n-1}$. Man kann mittels Verschiebungen durch Operationcn von A auf sich r Theta-Divisoren finden, die in allgemeiner Lage zueinander sind. Ihr Durchschnitt werde mit $D^{(r)}$ bezeichnet. Es ist eine glatte Varietät der Dimension $n-r$. Das arithmetische Geschlecht von $D^{(r)}$ multipliziert mit $(-1)^{n-r}$ ist gleich $r!$ mal der Stirlingschen Zahl $\left\{ {n \atop r} \right\}$, d.h. der Anzahl der Zerlegungen einer n-zahligen Menge in r disjunkte nicht-leere Teilmengen.

Die Berechnung von holomorphen Euler-Charakteristiken hängt in vielen Fällen mit dem Abzählen von Gitterpunkten zusammen. Das führte vor langer Zeit zur Berechnung des Volumenes von Würfelschnitten (W. Meyer-R. von Randow). Erst vor wenigen Tagen habe ich nach Diskussion und Korrespondenz mit Zbigniew Ciesielski folgendes bemerkt.

Es sei $B_n(x)$ das Volumen der folgenden Menge im n-dimensionalen reellen Raum (Würfelschnitt):

$$\left\{ t \mid t \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t_i \leq 1, x \leq \sum_{i=1}^{n} t_i \leq x+1 \right\}.$$

Dann ist $B_n(x)$ eine $(n-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen x. In jedem Intervall $[j, j+1]$, wo j eine ganze Zahl ist, wird sie durch ein Polynom vom Grade n gegeben. Sie verschwindet außerhalb des Intervalls $[-1, n]$. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_n(x)\,dx = 1\,.$$

Durch die erwähnten Eigenschaften ist der Spline $B_n(x)$ eindeutig bestimmt. Es gilt $B_n(k) = W_{n,k}/n!$, für $k \geq 0$.

Der Wert des Eulerschen Polynoms $P_n(z)$ an der Stelle $z = -1$ ist von besonderem lnteresse. Er ist gleich der Signatur der differenzierbaren $(2n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit D. In der Tat ist $P_n(-1) = 0$, wenn n gerade, und für $n = 2h+1$ ist

$$P_{2h+1}(-1) = (-1)^h\, tg^{(2h+1)}(0)\,,$$

was dem Zusammenhang des Signatursatzes mit der Tangensfunktion entspricht. Es ist

$$tg(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{n!}\, x^n\,,$$

wo die t_n ganze Zahlen sind mit $t_{2h+1} = tg^{(2h+1)}(0)$. Die ganze Zahl t_n ist gleich der Anzahl der Zick-Zack-Permutationen von n Objekten. (Eine Permutation $a_1, a_2, \cdots, a_n$ von $1, 2, \cdots, n$ heißt Zick-Zack-Permutation wenn $a_1 > a_2, a_2 < a_3, a_3 > a_4, \ldots$).

Diese Übereinstimmung ist mindestens seit 1880 bekannt (D. André). Aber wie erklärt sich, daß die Anzahl der Zick-Zack-Permutationen von $2h+1$ Objekten (bis auf das Vorzeichen) die Signatur der Varietät D (Theta-Divisor) der komplexen Dimension $2h$ ist? Eine Liste der Anzahlen t_n der Zick-Zack-Permutationen folgt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936	50521

Zu Beginn des Vortrags wurde auch noch auf die Bedeutung der t_{2h+1} für Triangulationen gerade-dimensionalen Mannigfaltigkeiten hingewiesen. Die Euler-Poincarésche Charakterisrik e einer $2m$-dimensionalen triangulierten Mannigfaltigkeit läßt sich nach klassischen Ergebnissen (Dehn-Sommerville, V. Klee, E. Peschl) durch die Anzahlen a_{2h} der geradedimensionalen Simplizes ausdrücken:

$$e = 2\sum_{h=0}^{m} (-1)^h \frac{t_{2h+1}}{2^{2h+1}}\, a_{2h}\,.$$

Die $(2m)$-Sphäre hat eine Triangulation mit $a_{2h} = \binom{2m+2}{2h+1}$, wodurch sich eine bekannte Formel zur induktiven Berechnung der t_{2h+1} ergibt (Schläfli).