16.

Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch

In: Symposium Internacional de Topología Algebraica (México 1956) S. 129–144, México: La Universidad Nacional Autónoma de México 1958

Auf dem Symposium über "Algebraic Topology and its applications", das in Mexico City im August 1956 stattfand, habe ich eine Reihe von Vorträgen gehalten,
1 in denen die Resultate einer gemeinsamen Arbeit mit A. Borel [4] dargestellt wurden. Ferner habe ich über Anwendungen dieser Resultate und des Satzes von Riemann-Roch auf beschränkte homogene symmetrische Gebiete berichtet, die in der vorliegenden Arbeit veröffentlicht werden sollen. Es handelt sich dabei um folgendes.

Die beschränkten homogenen symmetrischen Gebiete wurden von E. Cartan [6] klassifiziert. Einem solchen Gebiet X des $\mathbf{C}^n$ ist bekanntlich eine n-dimensionale homogene algebraische Mannigfaltigkeit X' in natürlicher Weise zugeordnet (vgl. [1]). X kann als offene Teilmenge derart in X' eingebettet werden, daß jeder Automorphismus von X zu einem solchen von X' erweitert werden kann. Wenn zum Beispiel X die Hyperkugel ist, dann ist X' der komplexe projektive Raum. Es sei Δ eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von X, für die X/Δ kompakt ist und die abgesehen von der Identität nur fixpunktfreie Transformationen enthält. Dann ist X/Δ eine algebraische Mannigfaltigkeit [11], und es wird gezeigt, daß jede Chernsche Zahl von X/Δ gleich dem arithmetischen Geschlecht von X/Δ (vgl. [8], S. 120/121) multipliziert mit der entsprechenden Chernschen Zahl von X' ist (Satz 4 dieser Arbeit). Die Anregung zu diesem Proportionalitätssatz erhielt ich aus einer Arbeit von Igusa, wo man diesen Satz für einen Spezialfall "zwischen den Zeilen" finden kann ([9], Theorem 8). Für den Proportionalitätssatz wird ein einfacher Beweis mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen Chernschen Zahlen und Krümmungstensor angegeben. Auf die Möglichkeit eines solchen Beweises (unter entscheidender Verwendung der Formel (9)) hat mich A. Borel aufmerksam gemacht. Mein ursprünglicher Beweis war komplizierter und verlief ohne jegliche Verwendung von Krümmungstensoren. Der Proportionalitätssatz liefert merkwürdige Beziehungen zwischen den Invarianten der komplexen Mannigfaltigkeit X/Δ (Korollar zu Satz 4) und schließlich eine Formel für die Anzahl der automorphen Formen vom Gewicht r, die einen Zusammenhang mit der Darstel-
2 lungstheorie kompakter Gruppen ergibt (Satz 5). Auf die schwierige Frage, in welchen Fällen Gruppen Δ mit den verlangten Eigenschaften existieren, wird nicht eingegangen.

In den Bezeichnungen schließen wir uns dem Ergebnisheft [8] an.

§ 1. Proportionale komplexe Mannigfaltigkeiten

Für eine komplexe Mannigfaltigkeit X sind Chernsche Klassen $c_i(X) \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$ definiert. Wenn X kompakt ist und die komplexe Dimension n hat, dann ist für jede Partition $\pi = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j)$ von n die Chernsche Zahl $c_\pi(X) = c_{\lambda_1} c_{\lambda_2} \cdots c_{\lambda_j}(X)$

durch folgende Gleichung gegeben

$$c_\pi(X) \cdot h_X = c_{\lambda_1}(X) c_{\lambda_2}(X) \cdots c_{\lambda_j}(X), \tag{1}$$

wo h_X das durch die natürliche Orientierung von X ausgezeichnete erzeugende Element der unendlich zyklischen Gruppe $H^{2n}(X, \mathbf{Z})$ ist.

Zwei kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten X, X' der Dimension n sollen proportional heißen, wenn eine rationale Zahl $a \neq 0$ existiert, derart, daß für jede Partition π von n gilt

$$c_\pi(X) = a \cdot c_\pi(X'). \tag{2}$$

Wir schreiben abkürzend

$$X \approx aX', \tag{2*}$$

wenn X und X' proportional mit dem Faktor a sind.

Da die gewöhnliche Euler-Poincarésche Charakteristik $E(X)$ gleich der Chernschen Zahl für $\pi = (n)$ ist, ergibt sich aus (2) insbesondere die Gleichung

$$E(X) = aE(X'). \tag{3}$$

Aus (2) ergibt sich auch, daß die Proportionalität mit dem Faktor a entsprechend für die Pontrjaginschen Zahlen gilt. Es folgt dann weiter, daß für die durch X und X' bestimmten Elemente $[X]$ und $[X']$ der Thomschen "Cobordisme"—Algebra $\Omega \otimes \mathbf{Q}$ gilt

$$[X] = a \cdot [X'] \tag{4}$$

Zur Thomschen Algebra siehe [16] und [8]. Aus (4) erhält man für den Index τ die Gleichung

$$\tau(X) = a \cdot \tau(X') \tag{5}$$

Zur Definition des Index siehe [8], S. 83. Wenn n nicht durch 2 teilbar ist, d.h. wenn die reelle Dimension von X und X' nicht durch 4 teilbar ist, dann ist per definitionem $\tau(X) = \tau(X') = 0$. Ferner ist dann nach Thom $[X] = [X'] = 0$. Die Gleichungen (4) und (5) sind also für ungerades n trivial.

Es sei X weiterhin eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Dann sind die Zahlen $\chi^p(X)$ definiert. $\chi^p(X)$ ist die Euler-Poincarésche Charakteristik von X bezüglich der Cohomologie mit Koeffizienten in der Garbe der Keime von holomorphen p-Formen. $\chi^0(X) = \chi(X)$ ist das arithmetische Geschlecht. Es sei ferner K das kanonische Geradenbündel von X und K^r seine r-te Potenz (r ganz) im Sinne des Tensorprodukts. Die Zahl $\chi(X, K^r)$, welche wir abkürzend mit $\chi(X, r)$ bezeichnen wollen, ist die Euler-Poincarésche Charakteristik von X bezüglich der Cohomologie mit Koeffizienten in der Garbe der Keime von holomorphen Schnitten des Geradenbündels K^r. Zu allen diesen Begriffen siehe [8] und die dort angegebene Literatur.

Unter einer algebraischen Mannigfaltigkeit verstehen wir in dieser Arbeit wie in [8] eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, die singularitätenfrei in einen

komplexen projektiven Raum geeigneter Dimension eingebettet werden kann. Nach dem Satz von Riemann-Roch [8] sind die Zahlen $\chi^p(X)$ und $\chi(X, r)$ Linearkombinationen der Chernschen Zahlen von X mit rationalen (von X unabhängigen) Koeffizienten. Dabei ist zu beachten, daß die charakteristische Klasse von K gleich $-c_1(X)$ ist. Aus den vorstehenden Bemerkungen folgt der

SATZ 1. *Es seien X und X' proportionale algebraische Mannigfaltigkeiten mit dem Proportionalitätsfaktor a* (siehe (2), (2*)). *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \chi^p(X) &= a \cdot \chi^p(X') \\ \chi(X, r) &= a \cdot \chi(X', r) \\ E(X) &= a \cdot E(X') \\ \tau(X) &= a \cdot \tau(X'). \end{aligned}$$

In der Thomschen Algebra $\Omega \otimes \mathbf{Q}$ ist

$$[X] = a \cdot [X'].$$

§ 2. Homogene hermitesche Mannigfaltigkeiten

Eine komplexe Mannigfaltigkeit, die mit einer hermiteschen Metrik versehen ist, wird kurz hermitesche Mannigfaltigkeit genannt. X sei nun eine hermitesche Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n. Zu der hermiteschen Metrik gehört ein Krümmungstensor R, welcher für jeden Punkt p von X jedem Paar x, y von Tangentialvektoren in p einen komplexen Endomorphismus des Tangentialraumes von X in p zuordnet. Es ist $R(x, y) = -R(y, x)$. In Bezug auf ein lokales Koordinatensystem kann R durch eine $n \times n$ - reihige Matrix (Ω_{rs}) gegeben werden, deren Elemente Ω_{rs} äußere Differentialformen vom Grade 2 sind. Der Krümmungstensor R kann auch aufgefaßt werden als eine äußere Differentialform vom Grade 2 mit Koeffizienten in dem komplexen Vektorraumbündel W über X, das zu dem tangentiellen $\mathbf{U}(n)$-Prinzipalbündel über X vermöge der adjungierten Darstellung von $\mathbf{U}(n)$ assoziiert ist. W ist das Tensorprodukt $\mathfrak{T} \otimes \mathfrak{T}^*$, wo $\mathfrak{T}$ das tangentielle komplexe Vektorraumbündel von X ist. Die Determinante

$$\left| \delta_{rs} - \frac{1}{2\pi i} \Omega_{rs} \right| \tag{6}$$

ist dann eine (vom Koordinatensystem unabhängige) reelle Differentialform (vom gemischten Grade) über X. Sie ist geschlossen und repräsentiert im Sinne von de Rham die (totale) Chernsche Klasse von X. Vgl [7]. Für Vorzeichenfragen siehe [4], Appendix I

$$1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n \cong \left| \delta_{rs} - \frac{1}{2\pi i} \Omega_{rs} \right| \tag{7}$$

Die c_j sind hier als reelle Cohomologieklassen aufzufassen.

Bei der Berechnung der Determinante und in allen anderen Fällen ist ein Produkt von Differentialformen immer im äußeren Sinne zu nehmen. Wenn X kompakt ist,

dann ist die Chernsche Zahl $c_\pi(X)$ (vgl. § 1) gleich dem Integral über X eines wohlbestimmten homogenen Polynoms P_π vom Grade n in den Ω_{rs}. Dieses Polynom P_π ist eine reelle Differentialform vom Grade $2n$, welche auch für nicht-kompaktes X definiert ist.

Nun sei X eine homogene hermitesche Mannigfaltigkeit, d.h. X besitze eine transitive Gruppe von Automorphismen, welche die Metrik und damit auch den Krümmungstensor invariant lassen. Ein Automorphismus ist in dieser Arbeit immer eine komplex-analytische eineindeutige Abbildung einer komplexen Mannigfaltigkeit auf sich. Das Volumelement v von X ist eine bezügliche der Gruppe invariante Differentialform vom Grade $2n$. Die Differentialform P_π ist ebenfalls invariant und P_π/v ist deshalb eine reelle Zahl r_π. Damit kann auch für nicht-kompaktes homogenes hermitesches X (bis auf einen von 0 verschiedenen Proportionalitätsfaktor) von den Chernschen Zahlen von X gesprochen werden, und es ist klar, wann X proportional zu einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X' gleicher Dimension genannt wird. Für die Berechnung der Chernschen Zahlen des cartesischen Produktes zweier kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten aus denen der Faktoren gibt es eine wohlbekannte Formel (vgl. z.B. [8], Lemma 10.2.1). Dieselbe Formel gilt für das cartesische Produkt zweier homogener hermitescher Mannigfaltigkeiten.

Wir müssen jetzt über einige Dinge aus der Theorie der homogenen hermiteschen symmetrischen Mannigfaltigkeiten referieren. Es werde dazu auf [6], [5], [1], [2]. [3] und auf die in [1] und [3] zitierte Literatur verwiesen. Bezüglich der beschränkten homogenen symmetrischen Gebiete werde auch auf die Untersuchungen von Harish-Chandra aufmerksam gemacht. (Vgl. [3], 16).

Eine komplexe Mannigfaltigkeit X heißt symmetrisch, wenn es zu jedem Punkt p von X einen Automorphismus σ_p von X gibt, der involutiv ist (d.h. $\sigma_p^2 = Id$) und der p als isolierten Fixpunkt hat. Eine hermitesche Mannigfaltigkeit heißt symmetrisch, wenn die Involution σ_p außerdem noch die Metrik invariant läßt.

Es sei G eine (zusammenhängende) einfache Liesche Gruppe, deren Zentrum nur aus dem Einselement bestehe, und es sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Der Quotientenraum G/H ist in folgenden Fällen in natürlicher Weise mit einer homogenen hermiteschen (sogar kählerschen) symmetrischen Struktur versehen.

(1) *G ist nicht-kompakt. H ist eine maximale zusammenhängende kompakte Untergruppe von G. Das Zentrum von H ist eindimensional.*

(2) *G ist kompakt. H ist eine maximale zusammenhängende echte kompakte Untergruppe von G. Der Rang von H ist maximal. H ist Zentralisator eines eindimensionalen Torus von G, der gleich der Zusammenhangskomponente des Einselements des Zentrums von H ist.*

Jedes irreduzible beschränkte homogene symmetrische Gebiet X in einem $\mathbf{C}^n$ ist einem Raum G/H der ersten Art isomoph, d.h. es gibt eine eineindeutige komplex-analytische Abbildung von X auf G/H, die die Bergmannsche Metrik von X in die homogene hermitesche Metrik von G/H überführt. Umgekehrt ist jeder Raum der ersten Art einem irreduziblen beschränkten homogenen symmetrischen Gebiet in diesem Sinne isomorph.

Die folgende Tabelle liefert eine vollständige Aufzählung der Räume zweiter Art. (Vgl. [1], S. 179–180).

I. $\mathbf{U}(p+q)/\mathbf{U}(p) \times \mathbf{U}(q)$

II. $\mathbf{SO}(2p)/\mathbf{U}(p)$

III. $\mathbf{Sp}(p)/\mathbf{U}(p)$

IV. $\mathbf{SO}(p+2)/\mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(2)$, $(p \neq 2)$

V. $\mathbf{E}_6/\mathbf{Spin}\,(10) \times \mathbf{T}^1$

VI. $\mathbf{E}_7/\mathbf{E}_6 \times \mathbf{T}^1$.

Diese Räume sind algebraische Mannigfaltigkeiten. (Um die Darstellung als G/H mit einfachem G "ohne Zentrum" zu erhalten, muß man Zähler und Nenner noch durch das Zentrum des Zählers dividieren.) Über die Räume zweiter Art siehe auch Borel—Siebenthal (Comm. Math. Helv., 23 (1949), 200–221).

Wie wir später sehen werden, kann jeder Raum X der ersten Art auf natürliche Weise als offene Teilmenge in einem Taum X' der zweiten Art eingebettet werden (vgl. [1]), und man erhält auf diese Weise eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den Räumen erster und zweiter Art, so daß die vorstehende Tabelle auch eine Klassifikation der irreduziblen beschränkten homogenen symmetrischen Gebiete liefert.

Es sei G/H ein Raum der ersten oder zweiten Art. Es sei $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ die Liesche Algebra von G bzw. H. Dann existiert ein Element $\sigma \in H$ mit $\sigma^2 = 1$, derart, daß $\mathfrak{h}$ der zum Eigenwert $+1$ gehörige Eigenraumdes Endomorphismus $\mathrm{Ad}(\sigma)$ von $\mathfrak{g}$ ist. Es sei $\mathfrak{m}$ der zum Eigenwert -1 gehörige Eigenraum von $\mathrm{Ad}(\sigma)$. Dann gilt

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h} \tag{8}$$

Es sei $B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y))$ die auf $\mathfrak{g}$ definierte Killingsche Bilinearform. ($x, y \in \mathfrak{g}$; "tr" bedeutet Spur = trace). Die linearen Teilräume $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{g}$ sind dann bezüglich B orthogonale Komplemente voneinander. $\mathfrak{m}$ ist mit dem Tangentialraum von G/H in $e_0 = (H)$ zu identifizieren. B ist bei Beschränkung auf $\mathfrak{m}$ definit und zwar positiv für Räume der ersten und negativ für Räume der zweiten Art. $\mathrm{Ad}(H)$ bildet $\mathfrak{m}$ in sich ab. $\mathrm{Ad}(\sigma)$ ist die Symmetrie in e_0. Die Form B ist invariant unter jedem Element von $\mathrm{Ad}(H)$. Deshalb liefert B bzw. $-B$ eine homogene Riemannsche symmetrische Metrik für G/H. Der zugehörige Riemannsche Krümmungstensor R ordnet dem Paar $x, y \in \mathfrak{m}$ den durch

$$R(x, y)z = -[[x, y], z], \quad z \in \mathfrak{m}, \tag{9}$$

gegebenen Endomorphismus von $\mathfrak{m}$ zu. (Man beachte (8).) Die Formel (9) stammt von E. Cartan. Für einen Beweis siehe [12].

Als Tangentialraum der komplexen Mannigfaltigkeit G/H im Punkte e_0 trägt $\mathfrak{m}$ eine komplexe Struktur, d.h. es ist ein Endomorphismus J von $\mathfrak{m}$ mit $JJ = -Id$

gegeben. Bekanntlich ist $J = \mathrm{ad}(h)|\mathfrak{m}$ für ein geeignetes $h \in \mathfrak{h}$. Ferner durchläuft $\exp(th)$ die Zusammenhangskomponente des Einselementes des Zentrums von H, und es ist $\exp(\pi h) = \sigma$. Nun ist

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}[h, x] \circ \mathrm{ad}(y) + \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}[h, y]) = 0. \tag{10}$$

Deshalb definiert B bzw. $-B$ die homogene hermitesche symmetrische Struktur von G/H, die sogar kählersch ist. Zu dieser kählerschen Metrik gehört ein Krümmungstensor, der jedem $x, y \in \mathfrak{m}$ den Endomorphismus $R(x, y)$ von $\mathfrak{m}$ zuordnet, der durch den Riemannschen Krümmungstensor gegeben wird (siehe [7], S. 114). $R(x, y)$ respektiert die komplexe Struktur. Also ist durch (9) auch der Krümmungstensor (Ω_{rs}), der zur kählerschen Metrik von G/H gehört, gegeben.

Der kählerschen Metrik von G/H ist eine geschlossene reelle Form ω vom Grade 2 zugeordnet (vgl. z.B. [8], 15.6). Für Räume erster Art ist die Form $\gamma = (2\pi i)^{-1} \sum_{s=1}^{n} \Omega_{ss}$ ein positives Vielfaches von ω, für Räume zweiter Art ein negatives Vielfaches von ω. Das kanonische Geradenbündel K hat $-c_1$ (repräsentiert durch γ) als charakteristische Cohomologieklasse. Also ist K für Räume erster Art positiv im Sinne von Kodaira (vgl. z.B. [8], S. 137), während für Räume zweiter Art K^{-1} in diesem Sinne positiv ist. Nach einem fundamentalen Satz von Kodaira [11] kann man daraus wieder die Tatsache erhalten, daß die Räume zweiter Art algebraische Mannigfaltigkeiten sind.

Es sei $X = G/H$ ein Raum erster Art. Wir wollen nun darüber berichten, wie X ein Raum X' der zweiten Art zugeordnet wird. Es sei wieder $\mathfrak{g}$ die Liesche Algebra von G und $\mathfrak{h}$ die von H. Dann haben wir die Zerlegung (8): $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, die eine Cartan Zerlegung von $\mathfrak{g}$ ist. (Vgl. Mostow, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) 969–980 und Memoirs of the AMS, 14, 1955.) Da G kein Zentrum hat, ist die komplexe Erweiterung $C(G)$ wohldefiniert. $C(G)$ hat die Liesche Algebra $\mathfrak{c} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h} + \mathfrak{m} + i\mathfrak{m}$. Es sei G' die zur Lieschen Unteralgebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} + i\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{c}$ gehörige zusammenhängende Untergruppe von $C(G)$. Dann ist G' kompakt, einfach und ohne Zentrum, enthält H, und $X' = G'/H$ ist der gesuchte Raum zweiter Art. In analoger Weise kann man umgekehrt von einem Raum zweiter Art zu einem Raum erster Art gelangen.

Das Element $\sigma \in H$, das die Symmetrie von X liefert, liefert auch die Symmetrie von X'. Wenn wir $\mathfrak{m}' = i\mathfrak{m}$ setzen, dann ist $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}'$ die zu $X' = G'/H$ gehörige Zerlegung (8). Nun ist $\mathfrak{m}'$ mit dem Tangentialraum von X' im Punkte $e_0' = (H)$ zu identifizieren. Das Element $h \in \mathfrak{h}$, das die komplexe Struktur von $\mathfrak{m}$ liefert, liefert auch die von $\mathfrak{m}'$. Ordnet man $x \in \mathfrak{m}$ das Element $ix \in \mathfrak{m}'$ zu, dann erhält man einen Isomorphismus der komplexen Vektorräume $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$. Wendet man (9) sowohl auf X als auch auf X' an, dann sieht man, dass bei diesem Isomorphismus der zur kählerschen Metrik von X gehörige Krümmungstensor in das Negative des zur kählerschen Metrik von X' gehörigen Krümmungstensors übergeht. Obwohl X nicht kompakt ist, sind für X als homogene hermitesche Mannigfaltigkeit Chernsche Zahlen (bis auf Proportionalität) definiert. Es folgt aus (7), dass X und X' proportional sind.

Satz 2. *Jedem Raum X der ersten Art ist ein Raum X' der zweiten Art in*

natürlicher Weise zugeordnet, und man erhält so eine eineindeutige Korrespondenz zwischen Räumen erster und zweiter Art. X und X' sind proportional!

Die komplexe Liesche Gruppe $C(G)$ operiert komplex-analytisch auf $X' = G'/H$. Es gibt nämlich eine abgeschlossene komplexe Untergruppe L von $C(G)$ mit $G' \cap L = G \cap L = H$. Man erhält einen natürlichen Homöomorphismus von X' auf $C(G)/L$, welcher mit der Operationen von G' und den komplexen Strukturen verträglich ist (vgl. [2]). Dann hat man auch eine natürliche Einbettung von $X = G/H$ in $X' = C(G)/L$, welche mit den Operationen von G und den komplexen Strukturen verträglich ist. X wird homöomorph auf eine offene Teilmenge von X' abgebildet. Jeder zu G gehörige Automorphismus von X lässt sich also zu einem solchen von X' erweitern ($G \subset C(G)$).

§ 3. Beschränkte homogene Gebiete

Es sei X ein beschränktes Gebiet im $\mathbf{C}^n$. Die Gruppe $\mathfrak{A}(X)$ der Automorphismen von X ist, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, eine Liesche Gruppe. Mit $\mathfrak{A}_0(X)$ werde die größte zusammenhängende Untergruppe von $\mathfrak{A}(X)$ bezeichnet. Eine Untergruppe von $\mathfrak{A}(X)$ ist genau dann diskret, wenn sie eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von X ist. (Vgl. [1] und die dort angegebene Literatur).

Es sei nun Δ eine diskrete Untergruppe von $\mathfrak{A}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften.

(11)
1. *Der Quotientenraum X/Δ ist kompakt.*
2. *Kein von der Identität verschiedenes Element von Δ hat einen Fixpunkt in X.*

Die kompakte komplexe Mannigfaltigkeit $Y = X/\Delta$ ist dann bekanntlich eine algebraische Mannigfaltigkeit, deren kanonisches Geradenbündel K_Y positiv im Sinne von Kodaira ist ([11], S. 41). Zur Terminologie vgl. auch [8], S. 137. Wenn X einfach-zusammenhängend ist, dann ist die universelle Überlagerung von X/Δ zu X komplex-analytisch homöomorph, und die Gruppe der Decktransformationen ist zu Δ isomorph.

Eine holomorphe Funktion f auf X heißt automorphe Form bezüglich Δ vom Gewicht r, wenn für alle $z \in X$ und $\gamma \in \Delta$ gilt:

$$f(\gamma z) = j_\gamma^{-r}(z) \cdot f(z), \tag{12}$$

wo $j_\gamma(z)$ die Funktionaldeterminate der Abbildung γ an der Stelle z ist. Die automorphen Formen vom Gewicht r bilden einen komplexen Vektorraum, welcher isomorph ist dem Vektorraume der holomorphen Schnitte des Geradenbündels K_Y^r über $Y = X/\Delta$. Es bezeichne $\Pi_r(X, \Delta)$ die Dimension dieses Vektorraumes, d.h. $\Pi_r(X, \Delta)$ ist die "Anzahl" der komplex-linear-unabhängigen automorphen Formen von X bezüglich Δ vom Gewicht r. Da K_Y positiv ist (im Sinne von Kodaira), verschwinden nach einem Satz von Kodaira ([10]; vgl. auch [8], Sätze 18.2.1 und 18.2.2) die Cohomologiegruppen von Y mit Koeffizienten in der Garbe

der Keime von holomorphen Schnitten von K_Y^r in den von 0 verschiedenen Dimensionen, falls $r \geqq 2$, und in den von n verschiedenen Dimensionen, falls $r \leqq -1$. Also ist

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\Pi_r(X, \Delta) = 0 \qquad \text{für } r \leqq -1 \\ &\Pi_0(X, \Delta) = 1 \\ &\Pi_1(X, \Delta) = g_n \\ &\Pi_r(X, \Delta) = \chi(X/\Delta, r) \qquad \text{für } r \geqq 2. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet g_j die "Anzahl" der holomorphen äußeren Differentialformen (Formen erster Gattung) vom Grade j über $Y = X/\Delta$. In anderen Worten: g_j ist die "Anzahl" der holomorphen äußeren Differentialformen vom Grade j über X, welche automorph sind bezüglich Δ.

Wir wollen das beschränkte Gebiet X jetzt als homogen voraussetzen, d.h. $\mathfrak{A}(X)$ soll transitiv sein. Jedes Element von $\mathfrak{A}(X)$ läßt die Bergmannsche Metrik von X invariant, also ist X homogen hermitesch (sogar kählersch). Die Chernschen Zahlen von X sind also bis auf Proportionalität wohl definiert. Da die hermitesche Metrik auf X/Δ durch die von X induziert wird (Δ habe wieder die Eigenschaften 1 und 2, siehe (11)), ist X proportional zu X/Δ. Jeder Chernschen Zahl entspricht eine invariante äußere Differentialform P_π vom Grade $2n$ auf X. Wenn v das Volumenelement der Bergmannschen Metrik bezeichnet, dann ist P_π/v eine Konstante. Wir erhalten so

SATZ 3. *Es sei X ein beschränktes homogenes Gebiet des $\mathbf{C}^n$, und Δ_1, Δ_2 seien diskontinuierliche Gruppen von Automorphismen von X, die beide die Eigenschaften* 1 *und* 2 *haben* (11). *Dann sind $Y_1 = X/\Delta_1$ und $Y_2 = X/\Delta_2$ proportionale algebraische Mannigfaltigkeiten und zwar gilt*

$$(14)\qquad Y_1 \approx \frac{V_1}{V_2} Y_2,$$

wo V_1 bzw. *V_2 das Volumen von Y_1* bzw. *Y_2 bezüglich der Bergmannschen Metrik von X ist. Für Y_1, Y_2 gelten alle Relationen von Satz* 1. *Wegen* (13) *gilt insbesondere für die Anzahlen der automorphen Formen vom Gewicht r*

$$(15)\qquad V_2 \cdot \Pi_r(X, \Delta_1) = V_1 \cdot \Pi_r(X, \Delta_2) \qquad \text{für } r \geqq 2.$$

Nun werde zusätzlich vorausgesetzt, daß das beschränkte homogene Gebiet X auch noch symmetrisch ist. Dann ist X cartesisches Produkt $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_s$ von irreduziblen beschränkten homogenen symmetrischen Gebieten. (Siehe §2). Jeder Faktor X_k ist ein Raum erster Art: $X_k = G_k/H_k$, wo G_k nicht-kompakt, einfach und ohne Zentrum ist. Jeder Raum X_k ist proportional zu einem Raum $X_k' = G_k'/H_k$ zweiter Art, wo G_k' kompakt, einfach und ohne Zentrum ist. Wir ordnen X die homogene algebraische Mannigfaltigkeit $X' = X_1' \times X_2' \times \cdots \times X_s'$ zu. X kann als offene Teilmenge in X' eingebettet werden. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{A}_0(X) = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s,$$

und somit kann jeder (zu $\mathfrak{A}_0(X)$ gehörige) Automorphismus von X zu einem Automorphismus von X' erweitert werden (vgl. den Schluss von §2). Der Satz 2 liefert

$$X \text{ proportional zu } X'. \tag{16}$$

Es sei Δ wieder eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von X mit den Eigenschaften 1 und 2, siehe (11). Aus (16) und der Proportionalität von X und X/Δ folgt, daß die algebraischen Mannigfaltigkeiten X/Δ und X' proportional sind:

$$X/\Delta \approx a \cdot X'.$$

Zur Bestimmung der Proportionalitätskonstanten a erinnern wir daran, daß die Zahlen $h^{p,q}$ von X' verschwinden, wenn $p \neq q$. (Vgl. [4].) Daraus folgt, daß das arithmetische Geschlecht $\chi(X')$ gleich 1 ist (vgl. [8], Satz 15.7.1), was auch aus der Tatsache gefolgert werden kann, daß X' rational ist (Goto), und was sich außerdem auch noch daraus ergibt, daß das kanonische Geradenbündel von X' negativ im Sinne von Kodaira ist. Nach Satz 1 ist

$$\chi(X/\Delta) = a \cdot \chi(X') = a.$$

Der Proportionalitätsfaktor a kann auch durch die Chernsche Zahl c_1^n bestimmt werden:

$$a = c_1^n(X/\Delta) : c_1^n(X').$$

Da die erste Chernsche Klasse von X/Δ negativ, diejenige von X' dagegen positiv im Sinne von Kodaira ist, folgt, daß a für gerades n positiv, für ungerades n negativ ist ($n = \dim_{\mathbf{C}} X$). Wir haben damit bewiesen.

SATZ 4. *Jedem beschränkten homogenen symmetrischen Gebiet X des $\mathbf{C}^n$ ist eine n-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit X' zugeordnet. Wenn Δ eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von X ist, für die X/Δ kompakt ist und die abgesehen von der Identität nur fixpunktfreie Transformationen enthält, dann ist X/Δ eine algebraische Mannigfaltigkeit, und es gilt die Proportionalität*

$$X/\Delta \approx \chi(X/\Delta) \cdot X',$$

wo $\chi(X/\Delta)$ das arithmetische Geschlecht von X/Δ ist, welches für gerades n positiv und für ungerades n negativ ist.

Um den Satz 4 konkret anwenden zu können, werde kurz über die Berechnung einiger Invarianten der algebraischen Mannigfaltigkeit X' referiert. Für die erforderlichen Informationen über kompakte Liesche Gruppen siehe etwa den Bericht von Samelson (Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 2–37).

Wir haben $X' = G'/H$, wo G' das direkte Produkt der kompakten einfachen Gruppen $G_1', \cdots, G_s'$ und H das direkte Produkt der Gruppen $H_1, \cdots, H_s$ ist ($H_j \subset G_j'$).

Die Euler-Poincarésche Charakteristik $E(X')$ ist der Quotient der Ordnung der

Weylschen Gruppe von G' durch die Ordnung der Weylschen Gruppe von H. Für Typ I–VI (siehe §2) ergeben sich für $E(X')$ die folgenden Werte

$$\begin{aligned} &\text{I. } (p+q)!/p!q! \\ &\text{II. } 2^{p-1} \\ &\text{III. } 2^p \\ &\text{IV. } p+2 \text{ für gerades } p\text{; und } p+1 \text{ für ungerades } p \\ &\text{V. } 27 \\ &\text{VI. } 56. \end{aligned} \tag{17}$$

Die Bettischen Zahlen $b_r(X')$ können mit Hilfe der Formel von Hirsch berechnet werden (vgl. A. Borel, Ann. of Math. 57 (1953), 115–207). Sie verschwinden für ungerades r. Die zweite Bettische Zahl von X' ist gleich s, der Anzahl der irreduziblen Faktoren von X'. Aus dem Verschwinden der Zahlen $h^{p,q}(X')$ für $p \neq q$ folgert man

$$b_{2j}(X') = h^{j,j}(X') = (-1)^j \chi^j(X'). \tag{18}$$

Nach der Formel von Hodge (vgl. [8], Satz 15.8.2) ergibt sich daraus für den Index $\tau(X')$

$$\tau(X') = \textstyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j b_{2j}, \qquad n = \dim_{\mathbf{C}} X'. \tag{19}$$

Wegen (19) ermöglicht die Formel von Hirsch auch eine Berechnung von $\tau(X')$. Für irreduzibles X' ergibt sich $\tau(X') = 0$ außer in folgenden Fällen

$$\begin{aligned} &\text{I. } X' = \mathbf{U}(p+2r)/\mathbf{U}(p) \times \mathbf{U}(2r), && \tau(X') = \left(\left[\frac{p}{2}\right] + r\right)! \Big/ \left[\frac{p}{2}\right] !r! \\ &\text{IV. } X' = \mathbf{SO}(4k+2)/\mathbf{SO}(4k) \times \mathbf{SO}(2), && \tau(X') = 2 \\ &\text{V. } X' = \mathbf{E}_6/\mathbf{Spin}(10) \times \mathbf{T}^1, && \tau(X') = 3. \end{aligned} \tag{20}$$

Die vorstehend zusammengetragenen Informationen geben dem folgenden Korollar einiges Interesse.

Korollar zu Satz 4. *Es sei X ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet des $\mathbf{C}^n$. Es sollen Δ und X' dieselbe Bedeutung wie in Satz 4 haben. Ferner sei b_r die r-te Bettische Zahl. Dann gilt*

$$\chi^j(X/\Delta) = (-1)^j \chi(X/\Delta) \cdot b_{2j}(X') \neq 0,$$
$$\chi^1(X/\Delta) = -s \cdot \chi(X/\Delta) \neq 0,$$

wo s die Anzahl der irreduziblen Faktoren von X ist. Ferner gilt

$$E(X/\Delta) = \chi(X/\Delta) \cdot E(X')$$
$$\tau(X/\Delta) = \chi(X/\Delta) \cdot \tau(X')$$

$E(X/\Delta)$ ist positiv für gerades n und negativ für ungerades n. Wenn wenigstens einer der irreduziblen Faktoren von X eine zugehörige algebraische Mannigfaltigkeit hat, die nicht zu den in (20) aufgezählten Typen gehört, dann ist $\tau(X/\Delta) = 0$. Anderenfalls ist $\tau(X/\Delta) \geqq 1$.

§ 4. Einiges über kompakte Liesche Gruppen (vgl.[4]).

Es sei G eine kompakte Liesche Gruppe und ρ eine Darstellung von G in einem komplexen Vektorraum V. Es sei T ein maximaler Torus von G. Dann ist V eine direkte Summe

$$V = E_0 + E_1 + \cdots + E_s,$$

wo E_0 der komplexe Vektorraum aller unter T festen Vektoren ist und wo die E_j $(1 \leqq j \leqq s)$ eindimensionale komplexe Unterräume von V sind, die als ganzes durch jedes Element von T in sich überführt werden. T operiert auf E_j, und man erhält so Homomorphismen

$$\rho_j : T \to \mathbf{U}(1)$$

Es sei $\mathfrak{h}$ die Liesche Algebra von T ($\mathfrak{h}$ ist ein reeller Vektorraum). Die Liesche Algebra von $\mathbf{U}(1)$ sei mit $\mathbf{R}$ identifiziert und zwar so, daß die Abbildung exp: $\mathbf{R} \to \mathbf{U}(1)$ jedem $t \in \mathbf{R}$ das Element $e^{it} \in \mathbf{U}(1)$ zuordnet. Dann bestimmt ρ_j eine lineare Abbildung $2\pi a_j$ von $\mathfrak{h}$ in $\mathbf{R}$. Mit $\mathfrak{h}^*$ werde der duale Vektorraum von $\mathfrak{h}$ bezeichnet. Das Element $0 \in \mathfrak{h}^*$ (mit der Vielfachheit $\dim_{\mathbf{C}} E_0$) und die Elemente $a_j \in \mathfrak{h}^*$ $(1 \leqq j \leqq s)$ heißen die Gewichte der Darstellung ρ.

Von jetzt an werde G als halbeinfach vorausgesetzt. Die Gewichte der Isotropiedarstellung von T im komplex erweiterten reellen Tangentialraum von G/T im Punkte $e_0 = (T)$ sind die Wurzeln von G. Die Wurzeln von G sind $2m$ Elemente $\pm a_1, \pm a_2, \cdots, \pm a_m \in \mathfrak{h}^*$, wo $2m$ die reelle Dimension von G/T ist. Der Vektorraum $\mathfrak{h}^*$ ist in natürlicher Weise mit der Cohomologiegruppe $H^1(T, \mathbf{R})$ zu identifizieren. Man hat ferner einen Isomorphismus-auf

$$\psi : \mathfrak{h}^* = H^1(T, \mathbf{R}) \to H^2(G/T, \mathbf{R}),$$

wo ψ die negative Transgression im Faserbündel $(G, G/T, T)$ ist. Es seien jetzt $a_1, \cdots, a_m \in \mathfrak{h}^* = H^1(T, \mathbf{R})$ die positiven Wurzeln von G bezüglich einer festgewählten lexikographischen Anordnung von $\mathfrak{h}^*$. Dann besitzt G/T genau eine homogene komplexe Struktur, derart, daß die Gewichte der Isotropiedarstellung von T im komplexen Tangentialraum von G/T im Punkte $e_0 = (T)$ gleich $a_1, \cdots, a_m$ sind. Mit dieser komplexen Struktur ist G/T eine einfach-zusammenhängende algebraische Mannigfaltigkeit. Die (totale) Chernsche Klasse von G/T (als Cohomologieklasse mit reellen Koeffizienten) ist durch folgende Formel gegeben

$$c(G/T) = (1 + \psi a_1)(1 + \psi a_2) \cdots (1 + \psi a_m). \tag{21}$$

Die Cohomologiegruppe $H^2(G/T, \mathbf{Z})$ ist eine Untergruppe U von $H^2(G/T, \mathbf{R})$. Ordnet man jedem komplex-analytischen Geradenbündel F über G/T seine charakteristische Klasse (erste Chernsche Klasse) $f = c_1(F) \in U$ zu, dann erhält

man einen Isomorphismus γ der Gruppe der Isomorphieklassen von komplex-analytischen Geradenbündeln über G/T auf U. Mit (,) werde das durch die negative Killing-Form auf $\mathfrak{h}$ und damit auch auf $\mathfrak{h}^*$ induzierte skalare Produkt bezeichnet. W (Weylsche Kammer) sei die Menge aller $x \in H^2(G/T, R)$ mit $(\psi^{-1}x, a_j) \geqq 0$ für $1 \leqq j \leqq m$, und $\mathring{W}$ sei das Innere von W, d.h. die Menge aller $x \in W$ mit $(\psi^{-1} x, a_j) > 0$ für $1 \leqq j \leqq m$. Die Menge der (Äquivalenzklassen von) irreduziblen unitären Darstellungen von $\mathfrak{g}$ = Lie Algebra von G (oder in anderen Worten der universellen Überlagerung von G) entspricht eineindeutig der Menge $U \cap W$. Dem Element $f \in U \cap W$ entspricht die Darstellung mit Hauptgewicht $\psi^{-1} f$. Wenn $f \in U \cap W$, dann ist $\gamma^{-1} f$ ein Geradenbündel mit den folgenden Eigenschaften

$$H^j(G/T, \gamma^{-1}f) = 0 \quad \text{für } j > 0 \tag{22}$$

$$\chi(G/T, \gamma^{-1}f) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(G/T, \gamma^{-1}f) \tag{22*}$$

(23) $\dim_{\mathbf{C}} H^0(G/T, \gamma^{-1}f) =$ Grad derjenigen irreduziblen Darstellung von G, welche das Hauptgewicht $\psi^{-1}f$ hat.

(22) ergibt sich daraus, daß $f + c_1(G/T) = f + \psi(a_1 + \cdots + a_m) \in \mathring{W}$ und daß die Elemente von $\mathring{W}$ positiv im Sinne von Kodaira sind (vgl. [2], [10] und [8], Satz 18.2.2). Nach der Definition von χ folgt dann (22*). Die Formel (23) kann durch direkte Konstruktion der f zugeordneten Darstellung als Darstellung im Raume $H^0(G/T, \gamma^{-1}f)$ bewiesen werden (A. Borel—A. Weil, siehe einen Vortrag von J. -P. Serre im Seminar von N. Bourbaki, Mai 1954; vgl. auch die Untersuchungen von J. Tits, *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. 29 (1955), no. 3).

Die Formel (23) kann (unter Benutzung von (22*)) auch durch Berechnung von
3 $\chi(G/T, \gamma^{-1}f)$ nach dem Satz von Riemann-Roch bewiesen werden [4], wobei man die Formel von H. Weyl für den Grad der Darstellung mit Hauptgewicht $\psi^{-1}f$ zu verwenden hat [17].

(22*) und (23) ergeben für $f = 0$, dass das arithmetische Geschlecht $\chi(G/T)$ gleich 1 ist.

Es sei K eine Untergruppe von G mit maximalem Rang ($G \supset K \supset T$). Wir setzen voraus, dass G/K eine homogene komplexe Struktur zuläßt. Dann ist G/K mit dieser komplexen Struktur eine einfach-zusammenhängende algebraische Mannigfaltigkeit, und K ist der Zentralisator eines in T enthaltenen Torus. (Vgl. [2], Goto, Amer. J. Math. 76 (1954), 811–818 und Wang, ibid. 1–32.) Mit $\mathfrak{h}$ werde weiterhin die Liesche Algebra von T bezeichnet. $b_1, \cdots, b_n \in \mathfrak{h}^*$ seien die Gewichte der Isotropiedarstellung von K im komplexen Tangentialraum von G/K im Punkte $e_0 = (K)$. Hier ist $n = \dim_{\mathbf{C}} G/K$. Eine lexikographische Anordnung von $\mathfrak{h}^*$ heisse verträglich mit der komplexen Struktur von G/K, wenn die $b_1, \cdots, b_n$ positive Wurzeln von G bezüglich dieser Anordnung sind. Eine derartige verträgliche Anordnung existiert immer [4]. Zu ihr gehört eine homogene komplexe Struktur von G/T und eine von K/T. Mit diesen komplexen Strukturen erhält man das komplex-analytische Faserbündel $(G/T, G/K, K/T, p)$. Wir bezeichnen die

positiven Wurzeln der verträglichen lexikographischen Anordnung wieder mit $a_1, \cdots, a_m$. Die $b_1, \cdots, b_n$ sind dann genau diejenigen der a_j, welche nicht Wurzeln von K sind. Die $b_1, \cdots, b_n$ heißen deshalb komplementäre Wurzeln von G relativ K bezüglich einer mit der komplexen Struktur von G/K verträglichen lexikographischen Anordnung. Wie in [4] gezeigt wird, hat man die folgende Formel für die (totale) Chernsche Klasse von G/K (mit reellen Koeffizienten).

$$p^*c(G/K) = (1 + \psi b_1)(1 + \psi b_2) \cdots (1 + \psi b_n) \tag{24}$$

Wir setzen $b = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Also ist $\psi b = p^*c_1(G/K)$, und wir erinnern daran, daß $-c_1(G/K)$ die erste Chernsche Klasse des kanonischen Geradenbündels von G/K ist. Wir wollen nun die Zahl $\chi(G/K, -r)$ für $r \geqq 0$ berechnen (siehe §1). Zunächst folgt aus multiplikativen Eigenschaften des arithmetischen (Toddschen) Geschlechtes ([4], vgl. auch [8], Satz 21.2.1) und aus $\chi(K/T) = 1$, dass

$$\chi(G/K, -r) = \chi(G/K, -r) \cdot \chi(K/T) = \chi(G/T, \gamma^{-1}(\psi(rb))).$$

Man rechnet nach [4], daß $b \in W$. Aus (22*) und (23) folgt dann

(25) $\chi(G/K, -r) =$ *Grad der irreduziblen Darstellung von G (bzw. einer Überlagerung von G) mit Hauptgewicht $rb = r(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$.*

§ 5. Automorphe Formen

Es sei X ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet des $\mathbf{C}^n$. Es sei Δ eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von X, die wieder die Eigenschaften 1 und 2 von §3, (11), haben soll, d.h. X/Δ soll kompakt und Δ fixpunktfrei sein. Wir wollen jetzt eine Formel für die Anzahl $\Pi_r(X, \Delta)$ der automorphen Formen vom Gewicht r angeben. Wegen (13) beschränken wir uns auf den Fall $r \geqq 2$. Aus Satz 1 und Satz 4 folgt dann

$$\Pi_r(X, \Delta) = \chi(X/\Delta) \cdot \chi(X', r), \qquad (r \geqq 2). \tag{26}$$

Hier ist X' wieder die X zugeordnete algebraische Mannigfaltigkeit. (Vgl. §3). Es ist wohlbekannt, daß $\Pi_r(X, \Delta)$ ein Polynom in r vom Grade n ist. Wir müssen das Polynom $\chi(X', r)$ berechnen, das nur von X und nicht mehr von Δ abhängt. Für algebraische Mannigfaltigkeiten Y_1 und Y_2 gilt:

$$\chi(Y_1 \times Y_2, r) = \chi(Y_1, r) \cdot \chi(Y_2, r), \tag{27}$$

wie man etwa aus [8], Satz 12.1.1, entnehmen kann. Da für beschränkte homogene symmetrische Gebiete X_1 und X_2 die algebraische Mannigfaltigkeit $(X_1 \times X_2)'$ gleich dem cartesischen Produkt von X_1' und X_2' ist, könnten wir uns also wegen (27) bei der Berechnung des Polynoms $\chi(X', r)$ auf den Fall beschränken, wo X irreduzibel ist. Wir werden das vorläufig aber nicht tun.

Nach dem Serreschen Dualitätssatz [13] ([8], S. 120, (14)) ist

$$\chi(X', r) = (-1)^n \chi(X', 1 - r). \tag{28}$$

Die algebraische Mannigfaltigkeit $X' = G'/K$ ist ein Raum, wie er am Schluß

von §4 betrachtet wurde. (In §3 wurde H an Stelle von K geschrieben). Für $r \geqq 2$ ist $\chi(X', 1-r)$ nach (25) gleich dem Grad einer gewissen irreduziblen Darstellung. Wir erhalten so aus (26) und (28) den

SATZ 5. *Es sei X ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet im $\mathbf{C}^n$. Es sei X' die X zugeordnete homogene algebraische Mannigfaltigkeit ($X' = G'/K$ mit G' kompakt, halbeinfach und ohne Zentrum). Es seien $b_k (1 \leqq k \leqq n)$ die komplementären Wurzeln von G' relativ K bezüglich einer mit der komplexen Struktur von G'/K verträglichen lexikographischen Anordnung* (§4), d.h. *die b_k sind die Gewichte der Isotropiedarstellung von K im komplexen Tangentialraum von G'/K im Punkte $e_0 = (K)$. Es sei $b = \sum_{k=1}^n b_k$. Gegeben sei nun eine diskontinuierliche Gruppe Δ von Automorphismen von X, für die X/Δ kompakt sei und die abgesehen von der Identität nur fixpunktfreie Transformationen enthalte. Dann ist die Anzahl $\Pi_r(X, \Delta)$ der automorphen Formen von Gewicht r für $r \geqq 2$ durch folgende Formel gegeben*

$$\Pi_r(X, \Delta) = (-1)^n \chi(X/\Delta) \cdot \operatorname{grad}(G', (r-1)b), \quad (r \geqq 2). \tag{29}$$

Hier bezeichnet grad $(G', (r-1)b)$ *den* Grad *derjenigen irreduziblen Darstellung von G' (oder einer Überlagerung von G'), welche das Hauptgewicht $(r-1)b$ hat ("Hauptgewicht" ist im Sinne einer mit der komplexen Struktur von G'/K verträglichen lexikographischen Anordnung gemeint). $\chi(X/\Delta)$ ist das arithmetische Geschlecht der algebraischen Mannigfaltigkeit X/Δ. Es ist also*

$$\chi(X/\Delta) = 1 - g_1 + g_2 - \cdots + (-1)^n g_n,$$

wo g_j die Anzahl der komplex-linear-unabhängigen äusseren holomorphen Differentialformen vom Grade j ist, welche in X definiert und dort automorph sind bezüglich Δ.

Es seien jetzt $a_1, \cdots, a_m$ wieder die positiven Wurzeln von G' bezüglich einer mit der komplexen Struktur von G'/K verträglichen lexikographischen Anordnung, und es sei a ihre Summe. $\mathfrak{h}$ sei wieder die Liesche Algebra des maximalen Torus T ($T \subset K \subset G'$) und $(\ ,\ )$ das durch die negative Killingform auf $\mathfrak{h}^*$ induzierte skalare Produkt. Nach der Formel von H. Weyl ([17], Kap. IV, Satz 5) hat man

$$\operatorname{grad}(G', (r-1)b) = \prod_{j=1}^m \left(\left(\frac{a}{2} + (r-1)b, a_j\right) \Big/ \left(\frac{a}{2}, a_j\right) \right) \tag{30}$$

Nun ist $(b, a_j) = 0$, wenn a_j eine Wurzel von K ist (vgl. [4], Chap. IV). Deshalb vereinfacht sich (30) wie folgt

$$\operatorname{grad}(G', (r-1)b) = \prod_{k=1}^n \left(\left(\frac{a}{2} + (r-1)b, b_k\right) \Big/ \left(\frac{a}{2}, b_k\right) \right) \tag{31}$$

(31) ist ein Polynom in r vom Grade n. Nach Satz 5 ist es für $r \geqq 2$ gleich $(-1)^n \Pi_r(X, \Delta)/\chi(X/\Delta)$. Nach den Bemerkungen, die im Zusammenhang mit Formel (27) gemacht wurden, genügt es, dieses Polynom für irreduzibles X zu berechnen.

Es sei also X ein irreduzibles beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet. X' ist dann eine algebraische Mannigfaltigkeit G'/K von einem der Typen I–VI, die in §2 angegeben wurden. Wir betrachten die von Borel-Siebenthal (Comm. Math.

Helv. 23 (1949), 200–221) studierte explizite Einbettung von K in G' (siehe in der Tabelle loc. cit. S. 219 unter $G_{l-1} \times T$). Wie in [4], Chap. IV, gezeigt wird, gibt es auf G'/K genau zwei homogene komplexe Strukturen, diese sind vermöge eines Automorphismus von G' äquivalent, und man kann bei der Berechnung nach Formel (31) annehmen, dass die a_j die positiven Wurzeln bezüglich einer beliebigen lexikographischen Anordnung sind, für die die Summe zweier komplementärer Wurzeln b_i, b_j niemals eine Wurzel von G' ist. Wir erhalten so (etwa unter Verwendung der in [14], S. 218–129, angegebenen lexikographischen Anordnungen und Wurzeln und unter Ausnutzung expliziter Formeln, die sich in [17], [18] finden) für $r \geqq 2$:

$$\text{I. } X' = \mathbf{U}(p+q)/\mathbf{U}(p) \times \mathbf{U}(q)$$

$$\prod_r(X, \Delta) = (-1)^{pq}\, \chi(X/\Delta) \cdot \prod_{i,j} \frac{r(p+q) - i - j}{p + q - i - j}, \qquad \begin{cases} 0 \leqq i \leqq p-1 \\ 1 \leqq j \leqq q \end{cases}$$

Für $p = 1$ und $q = n$ ist X die Hyperkugel im $\mathbf{C}^n$, und X' ist der komplexe projektive Raum $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. In diesem Fall ist

$$\prod_r(X, \Delta) = (-1)^n\, \chi(X/\Delta) \cdot \binom{r(n+1) - 1}{n}.$$

$$\text{II. } X' = \mathbf{SO}(2p)/\mathbf{U}(p)$$

$$\prod_r(X, \Delta) = (-1)^{\frac{1}{2}p(p-1)}\, \chi(X/\Delta) \prod_{0 \leqq i < j \leqq p-1} \frac{2(r-1)(p-1) + i + j}{i + j}.$$

$$\text{III. } X' = \mathbf{Sp}(p)/\mathbf{U}(p)$$

$$\prod_r(X, \Delta) = (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}\, \chi(X/\Delta) \prod_{1 \leqq i \leqq j \leqq p} \frac{2(r-1)(p+1) + i + j}{i + j}$$

In diesem Fall ist X äquivalent zur Siegelschen oberen Halbebene im $\mathbf{C}^{\frac{1}{2}p(p+1)}$ (siehe [15]).

$$\text{IV. } X' = \mathbf{SO}(p+2)/\mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(2)$$

4 $$\prod_r(X, \Delta) = (-1)^p\, \chi(X/\Delta) \left(\binom{rp-1}{p} + \binom{rp}{p} \right)$$

BONN UNIVERSITY
BONN, GERMANY

LITERATUR

1. A. BOREL, *Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes*, Bull. Soc. Math., France, 80 (1952), 167–182.
2. A. BOREL, *Kählerian coset spaces of semisimple Lie Groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 40 (1954), 1147–1151.
3. A. BOREL, *Topology of Lie groups and characteristic classes*, Bull. Amer. Math. Soc., 61 (1955), 397–432.
4. A. BOREL and F. HIRZEBRUCH, *Characteristic classes and homogeneous spaces*, Amer. J. Math., 80 (1958), pp. 458–538.

5. A. Borel et A. Lichnerowicz, *Espaces riemanniens et hermitiens symétriques*, C. R. Acad. Sci. Paris, 234 (1952), 2332–2334.
6. E. Cartan, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., 11 (1935), 116–162; Oeuvres complètes, Part I, vol. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1952, S. 1259–1305.
7. S. S. Chern, *Characteristic classes of hermitian manifolds*, Ann. of Math., 47 (1946), 85–121.
8. F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, Heft 9, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.
9. J. Igusa, *On the structure of a certain class of Kaehler varieties*, Amer. J. Math., 76 (1954), 669–678.
10. K. Kodaira, *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1953), 1268–1273.
11. K. Kodaira, *On Kähler varieties of restricted type*, Ann. of Math., 60 (1954), 28–48.
12. K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math., 76 (1954), 33–65.
13. J. -P. Serre, *Un théorème de dualité*, Comm. Math. Helvet., 29 (1955), 9–26.
14. J. de Siebenthal, *Sur les sous-groupes fermés connexes d'une groupe de Lie clos*, ibid., 25 (1951), 210–256.
15. C. L. Siegel, *Symplectic geometry*, Amer. J. Math., 65 (1943), 1–86.
16. R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comm. Math. Helvet., 28 (1954), 17–86.
17. H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen*, Math. Zeit., 23 (1925) und 24 (1926). Selecta, Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956, S. 262–366.
18. H. Weyl, Classical groups. Princeton, Princeton University Press, 1946.