Involutionen auf Mannigfaltigkeiten

HEINRICH BEHNKE zum 70. Geburtstag gewidmet

F. HIRZEBRUCH

An der Konferenz über Transformationsgruppen (Tulane University, New Orleans) konnte ich leider wider Erwarten nicht teilnehmen. Der Aufforderung der Veranstalter, trotzdem einen Bericht für die Proceedings zu schreiben, komme ich gern nach. In New Orleans wollte ich über equivariant plumbing, equivariant handle body constructions und knot manifolds im Sinne von W. C. HSIANG, W. Y. HSIANG und JÄNICH vortragen. Der vorliegende Bericht hängt zwar hiermit sehr zusammen, legt jedoch das Schwergewicht auf Untersuchungen, mit denen ich mich in Berkeley (August und September 1967) beschäftigt habe. In Berkeley hatte ich zahlreiche Anregungen durch Gespräche mit D. SULLIVAN und C. T. C. WALL. Da es schwierig ist, diesen beiden Mathematikern stets an den in Frage kommenden Stellen des Berichtes zu danken, möchte ich dies hier in der Einleitung ganz herzlich tun. Die ursprünglich für New Orleans vorgesehenen Dinge kann man in den Lecture Notes von K. H. MAYER und dem Verf. [18] und in der Bonner Dissertation von D. ERLE nachlesen. Der vorliegende Bericht entspricht im wesentlichen Kolloquiumsvorträgen, die der Verfasser im Oktober 1967 in Haverford, Princeton, New York und Boston gehalten hat; der Bericht ist manchmal ausführlicher als die Vorträge, muß sich aber an manchen Stellen trotzdem auf Beweisandeutungen beschränken.

Viele Dinge dieser Arbeit können verallgemeinert werden auf G-Mannigfaltigkeiten, wo G eine kompakte Liesche Gruppe ist (vgl. ATIYAH and SINGER [3].

1. Beispiele von Involutionen

Wir betrachten die Gleichung

$$z_0^{a_0}+z_1^{a_1}+\cdots+z_n^{a_n}=0 \qquad (n\geqq 1). \tag{1}$$

Die Exponenten a_j sollen ganze Zahlen $\geqq 2$ sein. Wir setzen $a=(a_0,\ldots,a_n)$. Nach A. WEIL [31] ist die Anzahl der Lösungen von (1) über jedem endlichen Körper mit q Elementen gleich q^n, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(2)\quad \begin{cases} \text{Die Menge aller} \quad x=(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{Z}^{n+1} \quad \text{mit} \\ 0<x_j<a_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{n} \frac{x_j}{a_j}\in\mathbb{Z} \quad \text{ist leer.} \end{cases}$$

BRIESKORN ([6], [7]) hat die durch Konjunktion von (1) und der Gleichung

$$(3)\qquad \sum_{j=0}^{n} z_j\bar{z}_j=1$$

definierte orientierte $(2n-1)$-dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit $\Sigma_a^{2n-1}\subset\mathbb{C}^{n+1}$ betrachtet, die mit Kodimension 2 in der durch (3) gegebene Sphäre $\mathbb{S}^{2n+1}$ eingebettet ist. BRIESKORN hat zahlreiche interessante Resultate über die Σ_a^{2n-1} erhalten, die zum Teil im folgenden vorkommen.

Σ_a^{2n-1} ist $(n-2)$-fach zusammenhängend. Σ_a^{2n-1} ist eine rationale Homologiesphäre genau dann, wenn (2) gilt (vgl. auch [18]).

Wenn alle a_j gerade oder wenn alle a_j ungerade sind, dann führt die Involution $Tz=-z$ des $\mathbb{C}^{n+1}$ die Mannigfaltigkeit Σ_a^{2n-1} in sich über. Wir bezeichnen $T|\Sigma_a^{2n-1}$ mit T_a und erhalten Beispiele von orientierten Mannigfaltigkeiten mit orientierungserhaltenden fixpunktfreien Involutionen. Wenn alle a_j gerade sind, dann ist Σ_a^{2n-1} keine ganzzahlige Homologiesphäre [6]. Da wir hauptsächlich Involutionen auf Sphären untersuchen möchten, betrachten wir hier den Fall ungerader Exponenten.

Wenn alle a_j ungerade sind, dann ist (2) äquivalent mit der Existenz *eines* Exponenten a_i, welcher teilerfremd zu allen anderen Exponenten ist [7].

Wenn alle a_j ungerade sind, dann ist die Existenz von *zwei* Exponenten, von denen jeder teilerfremd zu allen anderen Exponenten ist, äquivalent damit, daß Σ_a^{2n-1} *eine ganzzahlige Homologiesphäre* ist ([6],[7]).

Für $n\geqq 3$ ist Σ_a^{2n-1} immer einfach-zusammenhängend. Nach SMALE [28] ist deshalb Σ_a^{2n-1} für $n\geqq 3$ eine Sphäre (d.h. homöomorph zur Standardsphäre), falls Σ_a^{2n-1} eine ganzzahlige Homologiesphäre ist.

Wir beschränken uns auf den Fall $n=2k$. Die orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten Σ_a^{4k-1} repräsentieren für $k\geqq 2$, sofern sie Sphären sind, Elemente der endlichen zyklischen Gruppe bP_{4k}, die von KERVAIRE und MILNOR [20] eingeführt wurde, und zwar ist $\Sigma_{(3,5,2,\dots,2)}^{4k-1}$ (insgesamt $2k+1$ Exponenten) ein erzeugendes Element dieser Gruppe ([6], [17], [18]), das mit M_0^{4k-1} bezeichnet werden soll. M_0^{4k-1} ist (bis auf das Vorzeichen) die Sphäre, die sich durch "plumbing" von 8 Exemplaren des Tangentialbündels von $\mathbb{S}^{2k}$ gemäß dem Baume E_8 ergibt ([17], [18]).

Wenn (2) erfüllt ist, dann liegt jede auftretende Summe $\sum \frac{x_j}{a_j}$ entweder strikt zwischen 0 und 1 mod 2 oder zwischen 1 und 2 mod 2. Wir betrachten entsprechend für $n=2k$ die Mengen

$$\left\{x \mid x \in \mathbb{Z}^{2k+1}, \quad 0<x_j<a_j, \quad 0<\sum_{j=0}^{2k} \frac{x_j}{a_j}<1 \bmod 2\right\}$$

$$\left\{x \mid x \in \mathbb{Z}^{2k+1}, \quad 0<x_j<a_j, \quad 1<\sum_{j=0}^{2k} \frac{x_j}{a_j}<2 \bmod 2\right\}$$

und definieren $\tau(a_0,a_1,\ldots,a_{2k})$ als die Differenz der Anzahlen dieser beiden Mengen. Diese Definition ist auch für $k=1$ sinnvoll. Wenn Σ_a^{4k-1} eine ganzzahlige Homologiesphäre ist $(k \geqq 1)$, dann ist $\tau(a_0,a_1,\ldots,a_{2k})$ durch 8 teilbar. In der Gruppe bP_{4k} gilt für $k \geqq 2$ (siehe [6], [7]; vgl. [17], [18])

$$\Sigma_a^{4k-1}=(-1)^k \tfrac{1}{8} \tau(a_0,\ldots,a_{2k}) M_0^{4k-1}. \tag{4}$$

Es ist $\tau(3,5,2,\ldots,2)=(-1)^k \cdot 8$ (für insgesamt $2k+1$ Exponenten). Man rechnet aus, daß für $a=(a_0,\ldots,a_{2k-1},3)$ gilt:

$$\begin{aligned} \tau(a_0,\ldots,a_{2k-1},3,3,3) &= -3\tau(a_0,\ldots,a_{2k-1},3), \\ & \qquad (k \geqq 1) \\ \tau(6j-1,18j-1,3) &= -24j(4j-1). \end{aligned} \tag{5}$$

Insbesondere gilt in bP_{4k}

$$\Sigma_{(5,17,3,\ldots,3)}^{4k-1}=3^{k+1} M_0^{4k-1}. \tag{6}$$

Die Ordnungen $d(k)$ der zyklischen Gruppen bP_{4k} sind bekannt (bis auf einen Faktor 2), vgl. [20]. In [17] habe ich leider nicht auf die Schwierigkeit mit dem Faktor 2 hingewiesen. Jedenfalls teilt die Primzahl 3 keine der Ordnungen $d(k)$. Deshalb ist $\Sigma_{(5,17,3,\ldots,3)}^{4k-1}$ ein erzeugendes Element der Gruppe bP_{4k}. Diese besondere Sphäre hat die fixpunktfreie Involution $T_{(5,17,3,\ldots,3)}$. Die Standardsphäre hat die Antipodenabbildung. Eine leichte Konstruktion (vgl. BREDON [4], 8.2) liefert aus einer fixpunktfreien Involution T auf eine Sphäre Σ eine fixpunktfreie Involution T' auf der Sphäre $\Sigma+2\Sigma'$, wo Σ' eine zu Σ gleichdimensionale Sphäre ist. Es folgt

Satz. *Jede Sphäre in* bP_{4k} $(k \geqq 2)$ *besitzt eine (orientierungserhaltende) fixpunktfreie differenzierbare Involution.*

Es entsteht die Frage, ob jedes Element von bP_{4k} in der Form Σ_a^{4k-1} mit ungeraden Exponenten a_j geschrieben werden kann.

2. Die Signatur

In diesem Paragraphen brauchen wir nicht vorauszusetzen, daß die auftretenden Mannigfaltigkeiten differenzierbar sind.

Es sei M^{4k} eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand und $T\colon M^{4k} \to M^{4k}$ eine orientierungstreue Involution.

Für $x, y \in H_{2k}(M^{4k}, \mathbb{R})$ werde mit $x \circ y$ die Schnittzahl von x und y bezeichnet. Es sei

$$f_T(x,y) = x \circ Ty.$$

Da $x \circ Ty = Tx \circ TTy = Tx \circ y = y \circ Tx$, ist f_T eine symmetrische Bilinearform über dem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum $H_{2k}(M^{4k}, \mathbb{R})$ und hat als solche eine Signatur $\tau(f_T) =$ Anzahl der positiven minus Anzahl der negativen „Eigenwerte" von f_T. (Die Form f_T kann ausgeartet sein. „Eigenwerte" 0 werden bei der Bildung der Signatur nicht berücksichtigt.) Für $T =$ Identität ist $\tau(M^{4k}, T)$ die übliche Signatur $\tau(M^{4k})$ von M^{4k}, in [16] Index genannt.

Wenn T fixpunktfrei ist, dann gilt, wie leicht zu zeigen,

$$\tau(M^{4k}, T) = 2\tau(M^{4k}/T) - \tau(M^{4k}). \tag{7}$$

Die Signatur $\tau(M^{4k}, T)$ hat die folgende additive Eigenschaft, die für $T = Id$ von S. P. Novikov bemerkt und mir von D. Sullivan und C. T. C. Wall mitgeteilt wurde.

(M_1^{4k}, T_1) und (M_2^{4k}, T_2) seien kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten mit orientierungserhaltender Involution. B_1 bzw. B_2 sei Vereinigung von Zusammenhangskomponenten des Randes von M_1 bzw. M_2 mit $T_1(B_1) = B_1$ und $T_2(B_2) = B_2$. Die Paare $(B_1, T_1|B_1)$ und $(B_2, T_2|B_2)$ seien äquivariant und orientierungstreu homöomorph. Verklebt man M_1^{4k} mit M_2^{4k} vermöge dieses Homöomorphismus, dann erhält man eine Mannigfaltigkeit

$$M^{4k} = M_1^{4k} \ominus M_2^4 k,$$

die so orientiert sei, daß auf M_1^{4k} die gegebene, auf M_2^{4k} die zur gegebenen entgegengesetzte Orientierung induziert wird. T_1, T_2 bauen sich zu einer

Involution T auf M^{4k} zusammen. Es gilt

$$\tau(M^{4k},T)=\tau(M_1^{4k},T_1)-\tau(M_2^{4k},T_2). \tag{8}$$

Wenn B_1, B_2 Sphären (der Dimension $4k-1$) sind, dann ist (8) trivial. (8) kann allgemein durch genaueres Studium der Mayer-Vietoris-Sequenz von $(M^{4k}; M_1^{4k}, M_2^{4k})$ bewiesen werden; vgl. [3], Proposition 7.1.

3. Eine Anwendung der Transversalitätssätze

Es sei M^{4k} eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit und X eine kompakte differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Es sei $X \cap \partial M = \phi$. Die Mannigfaltigkeit X hat also keinen Rand. X braucht nicht zusammenhängend zu sein. Wir lassen sogar zu, daß die verschiedenen Zusammenhangskomponenten von X verschiedene Dimension haben. Die Kodimensionen dieser Zusammenhangskomponenten sollen alle gerade sein; wir sagen dann, daß die Kodimension von X gerade ist. X braucht nicht orientierbar zu sein. Die Injektion $i: X \to M^{4k}$ besitzt eine Approximation $j: X \to M^{4k}$, welche zur Untermannigfaltigkeit X von M^{4k} transversal ist (vgl. [29], [22a]). Das Urbild $j^{-1}(X)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von X, und zwar ist das Normalbündel von $j^{-1}(X)$ in X isomorph zur Beschränkung des Normalbündels von X in M^{4k} auf $j^{-1}(X)$. Der Isomorphismus wird durch j induziert. Damit ist das Normalbündel von $j^{-1}(X)$ in M^{4k} als direkte Summe eines gerade dimensionalen reellen Vektorbündels mit sich selbst kanonisch orientiert. (Sind E, F orientierte Vektorräume, dann ist $E \oplus F$ orientiert durch Zusammensetzung der Orientierung von E und der von F in dieser Reihenfolge. Ist $E=F$, dann hängt die Orientierung von $E \oplus E$ nicht von der von E ab. Ist E geradedimensional, dann bleibt die so bestimmte Orientierung von $E \oplus E$ auch bei der Summandenvertauschung $E \oplus E \to E \oplus E$ invariant.) Also ist auch $j^{-1}(X)$ kanonisch orientiert, und zwar spannen die Orientierungen von $j^{-1}(X)$ und des Normalbündels von $j^{-1}(X)$ in M^{4k} die gegebene Orientierung von M^{4k} auf. Sind j_0, j_1 zwei hinreichend nahe Approximationen von i, die beide transversal zu X sind, dann existiert eine Homotopie $J: X \times I \to M^{4k}$ mit $J(x,0)=j_0(x)$ und $J(x,1)=j_1(x)$, und zwar kann J transversal zur Untermannigfaltigkeit X von M^{4k} gewählt werden. $J^{-1}(X)$ etabliert dann einen orientierten Cobordismus zwischen $j_0^{-1}(X)$ und $j_1^{-1}(X)$. Das Normalbündel von $J^{-1}(X)$ in $M^{4k} \times I$ ist wieder die direkte Summe eines Vektorbündels mit sich selbst. Deshalb repräsentieren $j_0^{-1}(X)$ und $j_1^{-1}(X)$ dasselbe Element der Thomschen Cobordismus-Algebra Ω_*, siehe [29]. Dieses wohldefinierte Element von Ω_* wollen wir mit $X \circ X$ bezeichnen und als Selbstschnitt von X in M^{4k} interpretieren. Wenn $\dim X \leqq 2k$ (d. h. wenn alle Zusammenhangskomponenten von X eine Dimension $\leqq 2k$ haben), dann ist $X \circ X \in \Omega_0 = \mathbb{Z}$ und gerade die Selbstschnittzahl der Homologieklasse der Vereinigungsmenge der $2k$-dimensionalen Komponenten von X, sofern diese orientierbar sind. Die Signatur $\tau(X \circ X)$ ist wohlerklärt, da $\tau: \Omega^* \to \mathbb{Z}$ ein Homomorphismus der Cobordismusalgebra in die ganzen Zahlen ist [16]. In dem obigen Fall, wo $\dim X \leqq 2k$, ist $\tau(X \circ X)$ die erwähnte Selbstschnittzahl.

4. Ein Spezialfall des Atiyah-Bott-Singerschen Fixpunktsatzes

Es sei T eine orientierungserhaltende differenzierbare Involution $M^{4k} \to M^{4k}$. Es werde aber jetzt vorausgesetzt, daß $T|\partial M^{4k}$ fixpunktfrei ist. Die Menge $\operatorname{Fix} T$ der Fixpunkte von T ist eine kompakte differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $M^{4k} - \partial M^{4k}$ gerader Kodimension. ($\operatorname{Fix} T$ spielt hier die Rolle von X in § 3.) Nach § 3 ist $\tau(\operatorname{Fix} T \circ \operatorname{Fix} T)$ erklärt!

Satz. *Wenn* $\partial M^{4k} = \phi$, *dann*

$$\tau(M^{4k}, T) = \tau(\operatorname{Fix} T \circ \operatorname{Fix} T). \tag{9}$$

Der Beweis ergibt sich aus dem G-Signature-Theorem (6.12.) des noch nicht veröffentlichten Manuskriptes von Atiyah-Singer [3].

Wenn T fixpunktfrei ist, dann muß also $\tau(M^{4k}, T) = 0$ sein. Dies folgt auch aus § 2 (7), da bekanntlich die Signatur sich bei Überlagerungen orientierter *differenzierbarer* Mannigfaltigkeiten multiplikativ verhält. Da diese Eigenschaft der Signatur für topologische Mannigfaltigkeiten unbekannt ist [9], weiß man auch nicht, ob $\tau(M^{4k}, T)$ im Falle topologischer Mannigfaltigkeiten und fixpunktfreier Involutionen immer verschwindet.

Der vorstehende Satz impliziert aber sogar, daß $\tau(M^{4k}, T) = 0$, falls nur $\dim \operatorname{Fix} T < 2k$ (d. h. falls alle Zusammenhangskomponenten von $\operatorname{Fix} T$ eine Dimension $< 2k$ haben). Dies ist in der kombinatorischen und in der topologischen Kategorie im allgemeinen falsch und kann vielleicht wieder richtig werden, wenn man über $\operatorname{Fix} T$ gewisse Regularitätsvoraussetzungen macht.

Wie leicht zu sehen, ist $\tau(M^{4k}, T)$ modulo 2 gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik $e(M^{4k})$. Dies liefert einen Satz von Conner und Floyd ([10], vgl. [3]).

Korollar. *Es sei M^{4k} eine kompakte orientierte differenzierbare unberandete Mannigfaltigkeit mit $e(M^{4k})$ ungerade und T eine orientierungstreue Involution von M^{4k}. Dann hat wenigstens eine der Komponenten von* $\operatorname{Fix} T$ *eine Dimension* $\geqq 2k$.

Falls $\partial M^{4k} \neq \phi$, dann ist (9) im allgemeinen falsch. Dieser „Fehler“ kann zur Definition einer Invarianten der fixpunktfreien Involution $T|\partial M^{4k}$ benutzt werden (vgl. [3]).

Satz. *Es seien (M_1^{4k}, T_1) und (M_2^{4k}, T_2) kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit orientierungstreuen Involutionen, für die $T_1|\partial M_1^{4k}$ und $T_2|\partial M_2^{4k}$ fixpunktfrei sind. $(\partial M_1^{4k}, T_1|\partial M_1^{4k})$ und $(\partial M_2^{4k}, T_2|\partial M_2^{4k})$ seien orientierungstreu äquivariant diffeomorph. Dann ist*

$$\tau(M_1^{4k}, T_1) - \tau(\operatorname{Fix} T_1 \circ \operatorname{Fix} T_1) = \tau(M_2^{4k}, T_2) - \tau(\operatorname{Fix} T_2 \circ \operatorname{Fix} T_2). \tag{10}$$

Beweis. Wir betrachten auf $M^{4k} = M_1^{4k} \ominus M_2^{4k}$ die Involution T, (vgl. § 2). Da $\partial M^{4k} = \phi$, gilt (9). Offensichtlich ist $\operatorname{Fix} T = \operatorname{Fix} T_1 \cup \operatorname{Fix} T_2$ und

$$\tau(\operatorname{Fix} T \circ \operatorname{Fix} T) = \tau(\operatorname{Fix} T_1 \circ \operatorname{Fix} T_1) - \tau(\operatorname{Fix} T_2 \circ \operatorname{Fix} T_2).$$

Aus dieser Gleichung und aus (8) folgt wegen (9) die zu beweisende Gleichung (10).

5. Eine Invariante für fixpunktfreie Involutionen

Es sei X^{4k-1} $(k \geqq 1)$ kompakt, orientiert, differenzierbar, unberandet. T sei eine orientierungstreue fixpunktfreie differenzierbare Involution von X. Dem Paar (X, T) soll eine rationale Zahl $\alpha(X, T)$ als „Invariante“ zugeordnet werden. Wir werden sehen, daß $2\alpha(X, T)$ ganzzahlig ist.

Bisher ist kein Beispiel bekannt, in dem $\alpha(X, T)$ nicht ganzzahlig ist. (Inzwischen hat JÄNICH bewiesen, daß $\alpha(X, T)$ stets ganzzahlig ist.)

Mit mX bezeichnen wir die disjunkte Vereinigung von m Exemplaren von X. Falls $m_1 X$ eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit N_1^{4k} so berandet, daß die auf $m_1 X$ gegebene Involution sich zu einer (orientierungstreuen) Involution T_1 auf N_1^{4k} erweitern läßt, dann definieren wir

$$\alpha(X, T) = \frac{1}{m_1}\left(\tau(N_1^{4k}, T_1) - \tau(\operatorname{Fix} T_1 \circ \operatorname{Fix} T_1)\right). \tag{11}$$

Aus der Bordismus-Theorie [10] folgt, daß

$$\Omega_*(B_{Z_2}) \otimes \mathbb{Q} = \Omega_* \otimes \mathbb{Q}.$$

Da $\Omega_{4k-1}\otimes\mathbb{Q}=0$ existieren m_1, N_1^{4k}, T_1 mit den obigen Eigenschaften immer und zwar sogar so, daß $\operatorname{Fix} T_1=\phi$. Nach BURDICK [8a] ist

$$\Omega_n(B_{Z_2})\cong\Omega_n+\mathfrak{N}_{n-1},$$

deshalb kann m_1 immer gleich 2 gewählt werden (mit $\operatorname{Fix} T_1=\phi$).

Es muß jetzt gezeigt werden, daß $\alpha(X,T)$ nicht von der Wahl von m_1, N_1, T_1 abhängt:

Falls m_2, N_2, T_2 mit den gleichen Eigenschaften gegeben sind, dann setzen wir $M_1=m_2N_1$ und $M_2=m_1N_2$ (Multiplikation mit m_2 bzw. m_1 bedeutet die disjunkte Vereinigung von m_2 bzw. m_1 Exemplaren von N_1 bzw. N_2). Da $\partial M_1=\partial M_2=m_1m_2X$, folgt aus § 4 (10), daß

$$m_2(\tau(N_1,T_1)-\tau(\operatorname{Fix} T_1\circ\operatorname{Fix} T_1))=m_1(\tau(N_2,T_2)-\tau(\operatorname{Fix} T_2\circ\operatorname{Fix} T_2)).$$

Damit ist $\alpha(X,T)$ wohldefiniert. $2\alpha(X,T)$ ist wegen des Resultats von BURDICK ganzzahlig.

BROWDER und LIVESAY [8] haben für eine (orientierungstreue) differenzierbare fixpunktfreie Involution T einer orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X^{4k-1}, *welche eine ganzzahlige Homologiesphäre* ist, eine Invariante $\beta(X,T)$ definiert. $\beta(X,T)$ ist eine ganze durch 8 teilbare Zahl. Ihr Verschwinden ist, jedenfalls wenn X eine topologische Sphäre mit $k\geqq 2$ ist, notwendig und hinreichend für die Existenz einer in X differenzierbar eingebetteten $\mathbb{S}^{4k-2}$ mit $T(\mathbb{S}^{4k-2})=\mathbb{S}^{4k-2}$.

Es sei $v\in H^1(X/T;\mathbb{Z}_2)$ die charakteristische Klasse der Überlagerung $p\colon X\to X/T$ und V^{4k-2} eine nicht-orientierte Untermannigfaltigkeit von X/T, welche v repräsentiert. Wir setzen $\tilde V=p^{-1}(V)$.

Es ist $X=A\cup TA$ mit $A\cap TA=\tilde V$. Die berandete Mannigfaltigkeit A ist orientiert, da X orientiert ist. $\partial A=\tilde V$ ist dann auch orientiert. Nach dem Alexanderschen Dualitätssatz ist für die ganzzahlige Homologie

$$(i_A,i_{TA})\colon H_{2k-1}(\tilde V)\to H_{2k-1}(A)\oplus H_{2k-1}(TA),$$

ein Isomorphismus, wo $i_A\colon\tilde V\to A$, $i_{TA}\colon\tilde V\to TA$ die Einbettungen sind. Über $\operatorname{Kern} i_A$ betrachtet man die symmetrische Bilinearform

$$B(x,y)=x\circ Ty,\qquad x,y\in\operatorname{Kern} i_A\subset H_{2k-1}(\tilde V).$$

(Beachte, daß T auf $\tilde V$ orientierungs-umkehrend ist.)

Die Browder-Liversay-Invariante $\beta(X,T)$ ist per definitionem die Signatur von B. Vertauscht man die Rollen von A und TA, dann ändert sich β nicht, β hängt nicht von der Wahl von V ab. Orientierungswechsel von X ändert das Vorzeichen von β. Die ganzzahlige quadratische Form B hat die Determinante ± 1. Da $B(x,x)$ stets gerade ist, folgt nach einem bekannten Satz über quadratische Formen (vgl. [18], § 13), daß $\beta(X,T)\equiv 0 \bmod 8$.

Satz. *Die orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit* X^{4k-1} $(k \geqq 1)$ *sei eine ganzzahlige Homologiesphäre,* T *eine fixpunktfreie Involution von* X. *Dann ist*

$$\alpha(X,T) = \pm \beta(X,T).$$

Beweisandeutung: DOLD [11] konstruiert ausgehend von V eine $4k$-dimensionale Mannigfaltigkeit D mit

$$\partial D = 2(X/T) - X.$$

Lemma. *Für die Doldsche Mannigfaltigkeit* D *ist*

$$\tau(D) = \pm \beta(X,T).$$

Dieses Lemma stellt die Hauptschwierigkeit da. Der Beweis, der aber doch ziemlich geradlinig aus der Doldschen Konstruktion folgt, soll bei anderer Gelegenheit nachgeholt werden.

Es sei ε die Antipodenabbildung von $\mathbb{S}^{4k-1}$. Nach einer Mitteilung von WALL – man kann dies auch aus den Ergebnissen von BURDICK (siehe § 5) schließen – sind (X,T) und $(\mathbb{S}^{4k-1},\varepsilon)$ cobordant, d. h. sie sind gleich als Elemente von $\Omega_*(B_{Z_2})$. Es gibt also eine Mannigfaltigkeit Y^{4k} mit fixpunktfreier Involution T', so daß

$$\partial(Y^{4k},T') = (X,T) - (\mathbb{S}^{4k-1},\varepsilon).$$

WALL hat die folgende Zahl betrachtet

$$\omega(X,T) = 2\tau(Y^{4k}/T') - \tau(Y^{4k}).$$

Lemma. $$\omega(X,T) = \alpha(X,T).$$

Beweis. Aus Y^{4k} erhält man durch Ankleben einer Zelle $\mathbb{D}^{4k}$ längs $\mathbb{S}^{4k-1}$ eine Mannigfaltigkeit $\bar{Y}^{4k}$ mit einer Involution $\bar{T}$, die genau einen Fixpunkt hat. Da $\tau(Y^{4k},T') = \tau(\bar{Y}^{4k},\bar{T})$, folgt die Behauptung wegen § 2 (7) und nach Definition von α.

Die Doldsche Konstruktion kann auch auf die berandete Mannigfaltigkeit Y^{4k} mit Involution T' angewandt werden. Man muß dazu eine Untermannigfaltigkeit V' von Y^{4k}/T' verwenden, welche die charakteristische Cohomologieklasse der Überlagerung $Y^{4k} \to Y^{4k}/T'$ repräsentiert und den Rand von Y^{4k}/T' transversal schneidet. Die Doldsche Konstruktion für Y^{4k} und T' ergibt dann eine Mannigfaltigkeit E^{4k+1}, deren Rand so aussieht

$$\partial E^{4k+1} = 2(Y^{4k}/T') - Y^{4k} - D_1 + D_2,$$

wo D_1 die Doldsche Mannigfaltigkeit für X und D_2 die für $\mathbb{S}^{4k-1}$ ist, also

$$\partial D_1 = 2(X/T) - X,$$
$$\partial D_2 = 2(\mathbb{S}^{4k-1}/\varepsilon) - \mathbb{S}^{4k-1}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\partial Y^{4k} &= X - \mathbb{S}^{4k-1},\\ \partial(Y^{4k}/T') &= X/T - \mathbb{S}^{4k-1}/\varepsilon.\end{aligned}$$

∂E^{4k+1} ist eine $4k$-dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit, die sich durch Zusammenkleben von berandeten Mannigfaltigkeiten längs Randkomponenten ergibt. Deshalb ist nach § 2 (8)

$$\begin{aligned}\tau(\partial E^{4k+1}) &= 2\tau(Y^{4k}/T') - \tau(Y^{4k}) - \tau(D_1) + \tau(D_2)\\ &= \omega(X,T) \pm \beta(X,T) + 0\\ &= \omega(X,T) \pm \beta(X,T).\end{aligned}$$

Da die Signatur einer Mannigfaltigkeit, die als Rand auftritt, verschwindet, ergibt sich der zu beweisende Satz.

6. Auflösung von Singularitäten

Problem. *Berechne die Invariante α für die Involution $T_{(a_0,a_1,\ldots,a_{2k})}$ von $\Sigma^{4k-1}_{(a_0,a_1,\ldots,a_{2k})}$ (alle a_j ungerade; $k \geqq 1$).*

Eine Lösung dieses Problems würde nützlich sein für die Beantwortung der Frage, welche Werte von α für Involutionen welcher Sphären aus bP_{4k} auftreten können. Diese Frage ist trotz der Ergebnisse von Lopez de Medrano [21] über die Browder-Livesay-Invariante β offen, da dieser nur zeigt, daß β $(=\alpha)$ für jedes j den Wert $8j$ auf wenigstens einer Sphäre vorgegebener Dimension $4k-1$ (mit $k \geqq 2$) annehmen kann, aber nichts darüber aussagt, auf welcher Sphäre der Wert $8j$ vorkommt. Für $k=1$ hat Lopez de Medrano ein entsprechendes Resultat für ganzzahlige Homologiesphären.

Das obige Problem kann vollständig gelöst werden für $k=1$. Die 3-dimensionale Mannigfaltigkeit $\Sigma^3_{(a_0,a_1,a_2)}$ ist eine ganzzahlige Homologiesphäre dann und nur dann, wenn a_0, a_1, a_2 paarweise teilerfremd sind. Sie ist keine Sphäre, wenn alle $a_j \geqq 2$. Für paarweise teilerfremde a_0, a_1, a_2 $(a_j \geqq 2)$ handelt es sich also um eine Poincarésche 3-dimensionale Mannigfaltigkeit (verschwindende erste Homologiegruppe, nicht triviale Fundamentalgruppe) und zwar ist $\Sigma^3_{(a_0,a_1,a_2)}$ die gefaserte Poincarésche Mannigfaltigkeit im Sinne von Seifert [27] mit drei Ausnahmefasern der Ordnungen a_0, a_1, a_2. Die Gruppe $\mathbb{S}^1 = \{t \mid t \in \mathbb{C} \text{ und } |t| = 1\}$ operiert auf $\Sigma^3_{(a_0,a_1,a_2)}$ vermöge

$$(12) \qquad (z_0, z_1, z_2) \mapsto (t^{a_1 a_2} z_0, t^{a_0 a_2} z_1, t^{a_0 a_1} z_2).$$

Diese $\mathbb{S}^1$-Aktion hat keine Fixpunkte. Die Orbits liefern die Seifertsche Faserung (vgl. auch [25]). Sind alle a_0, a_1, a_2 ungerade, dann ergibt sich für $t=-1$ die fixpunktfreie Involution $T_{(a_0,a_1,a_2)}$.

Auf jedem orientierten Seifertschen Faserraum mit orientierter Basis und mit Ausnahmefasern ungerader Ordnung operiert $\mathbb{S}^1$ und für $t=-1$ hat man eine fixpunktfreie Involution. Unter Verwendung von Methoden von R. VON RANDOW [26] kann man in all diesen Fällen die Invariante α berechnen. Wir beschränken uns hier auf ein Beispiel und verwenden dabei die Theorie der Auflösung der Singularitäten komplexer Flächen, die mit der Arbeit von R. VON RANDOW natürlich in engem Zusammenhang steht.

Satz. *Für die ganzzahlige Homologiesphäre $\Sigma^3_{(3,6j-1,18j-1)}$ $(j\geqq 1)$ mit der fixpunktfreien Involution $T=T_{(3,6j-1,18j-1)}$ hat die Invariante α den Wert $8j$.*

Beweisandeutung. $\Sigma^3_{(3,6j-1,18j-1)}$ berandet eine „Mannigfaltigkeit mit Singularität" $N_j^4\subset\mathbb{C}^3$, die wie folgt definiert ist:

$$z_0^3+z_1^{6j-1}+z_2^{18j-1}=0,$$

$$z_0\bar z_0+z_1\bar z_1+z_2\bar z_2\leqq 1.$$

Der einzige singuläre Punkt von N_j^4 ist $0=(0,0,0)$. Der klassische Auflösungsprozeß bläst 0 in ein System von rationalen Kurven (2-dimensionalen Sphären) auf. Vgl. z. B. [14], [15]. Man erhält hierdurch eine Mannigfaltigkeit M_j^4 und eine eigentliche (proper) Abbildung

$$\varphi: M_j^4\to N_j^4,$$

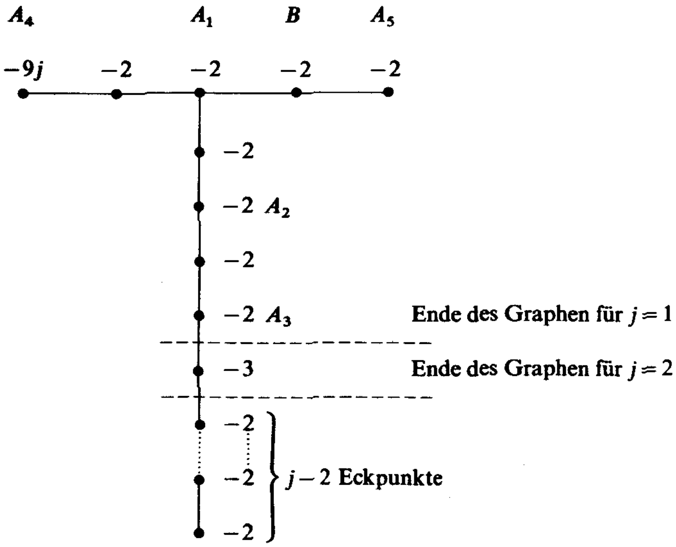
so daß

$$\varphi: M_j^4-\varphi^{-1}(0)\to N_j^4-\{0\},$$

biholomorph und $\varphi^{-1}(0)$ Vereinigung von orientierten 2-Sphären ist, die singularitätenfrei in M_j^4 eingebettet sind und deren Schnittverhalten durch einen Graphen $\mathfrak{G}_j$ angegeben wird:

Jede 2-Sphäre entspricht einem Eckpunkt von $\mathfrak{G}_j$. Wenn zwei Eckpunkte von $\mathfrak{G}_j$ nicht durch eine Kante verbunden sind, dann schneiden sich die entsprechenden 2-Sphären nicht. Wenn zwei Eckpunkte von $\mathfrak{G}_j$ durch eine Kante verbunden sind, dann schneiden sich die entsprechenden 2-Sphären transversal in genau einem Punkt mit der Schnittzahl $+1$. Der Graph $\mathfrak{G}_j$ wird bewertet, indem man jedem Eckpunkt die Selbstschnittzahl der entsprechenden 2-Sphären zuordnet. $\mathfrak{G}_j$ sieht so aus:

(13)



Sechs der $j+8$ Sphären haben wir einen Namen $A_1, \ldots, A_5, B$ gegeben. M_j^4 hat den Homotopietyp eines Buketts von $j+8$ zweidimensionalen Sphären. $H_2(M_j^4, \mathbb{Z})$ ist frei von Range $j+8$ mit den $j+8$ singularitätenfrei eingebetteten Sphären als Erzeugenden.

Die angegebene Auflösung ist die eindeutig bestimmte minimale Auflösung (vgl. z. B. [5], p. 81). Daraus kann man schließen, daß die durch (12) gegebene $\mathbb{S}^1$-Aktion sich von N_j^4 auf M_j^4 holomorph anheben läßt. φ wird dann äquivariant. Die $\mathbb{S}^1$-Aktion führt deshalb $\varphi^{-1}(0)$ in sich über. Außerhalb von $\varphi^{-1}(0)$ hat sie keine Fixpunkte. Da $t \in \mathbb{S}^1$ auf der Homologie von M_j^4 trivial operiert ($\mathbb{S}^1$ ist zusammenhängend), muß jede 2-Sphäre für jedes t in sich übergehen. Der Schnittpunkt zweier Sphären ist daher fix unter der $\mathbb{S}^1$-Aktion. Auf der Sphäre A_1 hat die $\mathbb{S}^1$-Aktion also 3 Fixpunkte und damit ist A_1 fix. Auf jeder anderen Sphäre haben wir mindestens 2 Fixpunkte der $\mathbb{S}^1$-Aktion. Bezüglich einer geeigneten holomorphen Karte z für die Sphäre kann man zwei Fixpunkte 0 und ∞ nennen und erreichen, daß $t \in \mathbb{S}^1$ so operiert:

$$z \mapsto t^a z \qquad (a \in \mathbb{Z}),$$

wobei a im Rahmen des Auflösungsprozesses explizit berechnet werden kann. Es zeigt sich dabei, daß für die Sphären $\neq A_1$ der Exponent a nicht verschwindet und damit genau 2 Fixpunkte vorhanden sind. Die Fixpunktmenge der $\mathbb{S}^1$-Aktion ist also $A_1 \cup \{j+7 \text{ isolierte Punkte}\}$. Die

Involution T ergibt sich für $t=-1$ und kann also auch auf M_j^4 angehoben werden. Die Anhebung heiße ebenfalls T.

Auf $M_j^4-\varphi^{-1}(0)=N_j^4-\{0\}\subset \mathbb{C}^3-\{0\}$ ist T offensichtlich fixpunktfrei. $\operatorname{Fix} T$ besteht aus A_1 und den übrigen Sphären, für die der Exponent a gerade ist. Es ergibt sich, daß

$$\operatorname{Fix} T=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup\{j-1 \text{ isolierte Punkte}\}. \tag{14}$$

Somit ist

$$\tau(\operatorname{Fix} T\circ \operatorname{Fix} T)=A_1\circ A_1+\cdots+A_5\circ A_5=-9j-8.$$

Da T auf der Homologie von M_j^4 trivial operiert, gilt

$$\tau(M_j^4,T)=\tau(M_j^4).$$

Da die quadratische Form von M_j^4 nach einem bekannten Satz über die Auflösung von Singularitäten negativ-definit ist, hat man

$$\tau(M_j^4)=-(j+8).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\alpha(\Sigma^3_{(3,6j-1,18j-1)},T)&=\tau(M_j^4,T)-\tau(\operatorname{Fix} T\circ \operatorname{Fix} T)\\&=-(j+8)-(-9j-8)=8j.\end{aligned}$$

Bemerkungen. 1. Die Formel (14) kann man sich auch mit Hilfe des folgenden Lemmas klarmachen.

Mit $\mathbb{D}^n$ wird die abgeschlossene Einheits-Vollkugel in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Lemma. *Auf $\mathbb{S}^2$ sei I die orthogonale Involution mit genau zwei Fixpunkten $x_1, x_2 (x_1=-x_2)$. Es sei E ein Bündel über $\mathbb{S}^2$ mit typischer Faser $\mathbb{D}^2$, Strukturgruppe $SO(2)$ und gerader Eulerscher Zahl, d. h., die Selbstschnittzahl des Nullschnittes als Homologieklasse der Mannigfaltigkeit E ist gerade. Dann gibt es eine Involution I_1 (bzw. I_2) von E, welche eine orthogonale Bündelabbildung ist, auf der Basis I induziert und in den Fasern E_{x_1} und E_{x_2} die Identität (bzw. die Antipodenabbildung $v\mapsto -v$) ist. Ist dagegen die Eulersche Zahl ungerade, dann gibt es eine Involution I_1 (bzw. I_2) von E, welche eine orthogonale Bündelabbildung ist, auf der Basis I induziert und in E_{x_1} (bzw. E_{x_2}) die Identität und in E_{x_2} (bzw. E_{x_1}) die Antipodenabbildung ist.*

2. Die explizite Auflösung der Singularität von $z_0^{a_0}+z_1^{a_1}+z_2^{a_2}=0$ soll bei anderer Gelegenheit dargestellt werden. – Grundsätzlich könnte auch eine Auflösung der Singularität von $z_0^{a_0}+\cdots+z_{2k}^{a_{2k}}=0$ für die Bearbeitung des zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Problems verwendet werden. Der Rechenaufwand scheint jedoch sehr groß zu sein.

7. Fixpunktfreie Involutionen auf den 7-Sphären

Der Graph $\mathfrak{G}_j$ von § 6 (13) kann zur Konstruktion von 7-dimensionalen Sphären benutzt werden.

Zu $\mathfrak{G}_j$ gehört eine ganzzahlige Form f_j, nämlich die über $V_j = H_2(M_j^4, \mathbb{Z})$ definierte Schnittform. Es ist $\det f_j = \pm 1$, da ∂M_j^4 eine ganzzahlige Homologiesphäre ist (vgl. [18]).

Jedem Eckpunkt P von $\mathfrak{G}_j$ ordne man ein Bündel mit typischer Faser $\mathbb{D}^4$, Strukturgruppe $SO(4)$ und Eulerscher Zahl $f_j(P,P)$ zu. (Beachte hier, daß P als Element von V_j angesehen werden kann. $f_j(P,P)$ ist die dem Eckpunkt P zugeordnete ganze Zahl; siehe (13).) Durch „plumbing" dieser Bündel gemäß dem Graphen $\mathfrak{G}_j$ erhält man eine Mannigfaltigkeit M_j^8 vom Homotopietyp eines Buketts von $j+8$ vierdimensionalen Sphären (vgl. [18]).

Die Schnittform von M_j^8 ist gleich f_j; wenn man $H_4(M_j^8, \mathbb{Z})$ und V_j kanonisch identifiziert. Da $\det f_j = \pm 1$, ist ∂M_j^8 eine Sphäre [18] und repräsentiert ein Element der Gruppe $\Theta_7 = bP_8 = \mathbb{Z}_{28}$ (vgl. [20]). M_j^8 hängt nicht nur von j ab, sondern noch von der Wahl der den Eckpunkten von $\mathfrak{G}_j$ zugeordneten Bündel, die ja nicht durch die Eulersche Zahl allein bestimmt sind:

Die Isomorphieklassen der zu betrachtenden $SO(4)$-Bündel über $\mathbb{S}^4$ bilden die Gruppe $\pi_3(SO(4))$. Für $\xi \in \pi_3(SO(4))$ sind die ganzen Zahlen $e(\xi)$ (Eulersche Zahl) und $(p_1/2)(\xi)$ (halbe Pontrjaginsche Zahl) definiert. Es ist

$$e(\xi) \equiv \frac{p_1}{2}(\xi) \bmod 2 \tag{15}$$

und $(e, p_1/2)$ ist ein Isomorphismus von $\pi_3(SO(4))$ auf die Gruppe der Paare (a,b) ganzer Zahlen mit $a \equiv b \bmod 2$ (siehe [22]).

Für M_j^8 sind $H^4(M_j^8, \mathbb{Z})$, $H^4(M_j^8, \partial M_j^8, \mathbb{Z})$ und $H_4(M_j^8, \mathbb{Z})$ kanonisch isomorph. $H_4(M_j^8, \mathbb{Z})$ ist mit V_j zu identifizieren, und die 4-dimensionale Pontrjaginsche Klasse der Mannigfaltigkeit M_j^8 deshalb als ein Element von V_j anzusehen. Diese Pontrjaginsche Klasse ist durch 2 teilbar. Welche Elemente $w \in V_j$ können als halbe 4-dimensionale Pontrjaginsche Klassen einer Mannigfaltigkeit M_j^8 bei geeigneter Auswahl der den Eckpunkten P von $\mathfrak{G}_j$ zugeordneten Bündel auftreten? Wegen (15) muß w die Bedingung

$$f_j(w,P) \equiv f_j(P,P) \bmod 2,$$

für jeden Eckpunkt erfüllen. Das P zugeordnete Bündel ξ ist durch $f_j(w,P) = (p_1/2)(\xi)$ und $f_j(P,P) = e(\xi)$ bestimmt. Da $\det f_j = \pm 1$, sind die möglichen w genau die Elemente von V_j, welche der Bedingung

$$f(w,x) \equiv f(x,x) \bmod 2 \quad \text{für alle} \quad x \in V_j \tag{16}$$

genügen. Für ein solches w ist also durch „plumbing" eine Mannigfaltigkeit M_j^8 definiert, die wir genauer $M_j^8(w)$ nennen wollen.

Da $\det f_j = \pm 1$, liefert ein bekannter Satz über quadratische Formen ([18], § 13) die Kongruenz

$$\tfrac{1}{8}(\tau(f_j) - f_j(w,w)) \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Hier ist $\tau(f_j)$ die Signatur von f_j, in unserem speziellen Fall ist $\tau(f_j) = -(j+8)$.

Nach EELLS und KUIPER [12] bestimmt die in (17) angegebene Zahl nach Reduktion modulo 28 die differenzierbare Struktur der Sphäre $\partial M_j^8(w)$.

Die Mannigfaltigkeit $M_j^8(w)$ läßt eine Involution zu, die auf $\partial M_j^8(w)$ fixpunktfrei ist und der Involution T von M_j^4 (siehe § 6) genau nachgebildet ist. Die Beschreibung der $SO(4)$-Bündel über $\mathbb{S}^4$ mit Hilfe quaternionaler Übergangsfunktionen [22] zeigt nämlich, daß das Lemma von § 6 (Bemerkung 1.) auch im quaternionalen Fall richtig ist. (Man ersetze im Lemma $\mathbb{S}^2$ durch $\mathbb{S}^4$, $SO(2)$ durch $SO(4)$ und $\mathbb{D}^2$ durch $\mathbb{D}^4$). Dieses Lemma ermöglicht die Konstruktion von T (äquivariantes plumbing). Bis auf isolierte Fixpunkte bestimmt $\operatorname{Fix} T$ wie in § 6 die Homologieklasse

$$A_1 + \cdots + A_5 \in V_j \cong H_4(M_j^8(w), \mathbb{Z}).$$

Da T auf $H_4(M_j^8(w), \mathbb{Z})$ trivial operiert, ist die Invariante α wie in § 6 zu berechnen. Es folgt

$$\alpha(\partial M_j^8(w), T) = 8j.$$

Wir haben also eine fixpunktfreie Involution mit $\alpha = 8j$ auf allen Sphären von Θ_7, die sich durch „plumbing" gemäß dem Graph (13) darstellen lassen. Welche Sphären sind dies?

Offensichtlich hat $\operatorname{Fix} T = A_1 + \cdots + A_5$ die in (16) von w verlangte Eigenschaft. Die möglichen Werte von w sind daher gleich $\operatorname{Fix} T + 2u$ mit $u \in V_j$. Die Berechnung der in (17) angegebenen Zahl liefert

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{8}(\tau(f_j) - f_j(\operatorname{Fix} T + 2u, \operatorname{Fix} T + 2u)) \\ &= j - \frac{f_j(\operatorname{Fix} T, u) + f_j(u,u)}{2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Wir müßten also feststellen, welche ganzzahligen Werte modulo 28 in der Form (18) darstellbar sind? Wir gehen jedoch anders vor, und stellen zunächst fest, daß (vgl. § 6 (13)) durch

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(f_j(\operatorname{Fix} T, aA_1 + bB) + f_j(aA_1 + bB, aA_1 + bB)) \\ &= -a + b - a^2 + ab - b^2, \end{aligned} \tag{19}$$

sowohl gerade als auch ungerade Werte dargestellt werden. Bei der am Schluß von § 1 erwähnten Konstruktion (vgl. [4]), hat α für die Involution auf Σ und für die auf $\Sigma + 2\Sigma'$ den gleichen Wert. Es folgt

Satz. *Für jede Sphäre $\Sigma \in \Theta_7 = bP_8$ und jede ganze Zahl j gibt es eine differenzierbare Involution T auf Σ mit $\alpha(\Sigma, T) = 8j$. Auf jeder der 28 Sphären 7-Sphären gibt es also unendlich viele fixpunktfreie Involutionen, die paarweise differenzierbar inäquivalent sind.*

Bei der obigen Konstruktion war stets $j \geqq 1$. Orientierungswechsel beweist den Satz für $j \leqq -1$. Für $j = 0$ betrachtet man die Involution T auf der Sphäre M^7_{2h-1} ([22], [13]), die Rand des Bündels ξ über $\mathbb{S}^4$ mit Faser $\mathbb{D}^4$, Strukturgruppe $SO(4)$, mit $e(\xi) = 1$ und $(p_1/2)(\xi) = 2h - 1$ ist. Offensichtlich ist

$$\alpha(M^7_{2h-1}, T) = 1 - 1 = 0.$$

Nach [12] liefert M^7_{2h-1} sowohl gerade als auch ungerade Elemente von $\Theta_7 = \mathbb{Z}_{28}$.

8. Über S^1-Aktionen auf Sphären

Gegeben sei eine freie differenzierbare $\mathbb{S}^1$-Aktion auf einer (orientierten) Sphäre Σ der Dimension $4k-1$ ($\Sigma \in \Theta_{4k-1}$). Der Orbitraum $\Sigma/(\mathbb{S}^1)$ ist dann eine $(4k-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit vom Homotopietyp des komplexen projektiven Raumes $\mathbb{P}_{2k-1}(\mathbb{C})$. Die Sphäre Σ ist ein Prinzipalbündel über $\Sigma/(\mathbb{S}^1)$ mit Faser und Strukturgruppe $\mathbb{S}^1$. Dieses Bündel hat eine erste Chernsche Klasse

$$g \in H^2(\Sigma/(\mathbb{S}^1)), \mathbb{Z}).$$

Es ist

$$H^*(\Sigma/(\mathbb{S}^1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[g]/(g^{2k}).$$

Der Orbitraum werde so orientiert, daß

$$g^{2k-1}[\Sigma/(\mathbb{S}^1)] = +1.$$

Die Cohomologieklasse g kann in der orientierten Mannigfaltigkeit $\Sigma/(\mathbb{S}^1)$ durch eine orientierte Untermannigfaltigkeit X der Codimension 2 repräsentiert werden. Die Signatur $\tau(X)$ hängt nicht von der Wahl von X ab und heißt auch virtuelle Signatur (oder virtueller Index) von g

$$\tau(X) = \tau(\Sigma/(\mathbb{S}^1), g), \quad \text{vgl. [16].} \tag{20}$$

Wir definieren eine Invariante der $\mathbb{S}^1$-Aktion

$$\nu(\Sigma, (\mathbb{S}^1)) = 1 - \tau(\Sigma/(\mathbb{S}^1), g). \tag{21}$$

ν hängt nicht von der Orientierung von Σ ab. Die Invariante ν wurde von mehreren Autoren, insbesondere von BROWDER, NOVIKOV, ROTHENBERG, SULLIVAN und WALL, betrachtet. Da die rationalen Pontrjaginschen Klassen Homotopie-Invarianten mod 8 sind [2] und die L-Polynome [16] nicht die Primzahl 2 im Nenner enthalten, folgt

$$\nu(\Sigma,(\mathbb{S}^1)) \equiv 0 \bmod 8.$$

Das ergibt sich auch aus dem folgenden Satz. Zunächst aber einige Bezeichnungen.

Dem Prinzipalbündel mit Faser und Strukturgruppe $\mathbb{S}^1 = \{t | t \in \mathbb{C}$ und $|t| = 1\}$ ist ein $\mathbb{D}^2$-Bündel assoziiert, dessen Totalraum mit B bezeichnet werde. $\mathbb{D}^2$ ist kanonisch orientiert. Da wir $\Sigma/(\mathbb{S}^1)$ in bestimmter Weise orientiert hatten, sind B und $\Sigma = \partial B$ orientiert. Wir sagen, daß Σ kompatipel orientiert ist, wenn seine Orientierung in dieser Weise aus der von $\Sigma/(\mathbb{S}^1)$ gewonnen wird.

Satz. *Die Sphäre Σ der Dimension $4k-1$ sei mit einer freien $\mathbb{S}^1$-Aktion versehen. Σ sei kompatibel orientiert. Für $-1 \in \mathbb{S}^1$ erhält man eine fixpunktfreie Involution T von Σ. Es gilt*

$$\alpha(\Sigma, T) = \nu(\Sigma,(\mathbb{S}^1)).$$

Beweis. T ist auch auf B definiert. $\operatorname{Fix} T$ ist der Nullschnitt des Bündels B, also eine Untermannigfaltigkeit von B, die mit $\Sigma/(\mathbb{S}^1)$ zu identifizieren ist. $\operatorname{Fix} T \circ \operatorname{Fix} T$ (im Sinne von § 3) ist eine Untermannigfaltigkeit von $\Sigma/(\mathbb{S}^1)$, die die Cohomologieklasse g repräsentiert, also als Mannigfaltigkeit X gewählt werden kann. Ferner ist $\tau(B, T) = 1$. Es folgt

$$\alpha(\Sigma, T) = \tau(B, T) - \tau(\operatorname{Fix} T \circ \operatorname{Fix} T) = 1 - \tau(X) = \nu(\Sigma,(\mathbb{S}^1)).$$

Bemerkung. Für $k = 2$ ist die Übereinstimmung von ν und β (vgl. § 5) ein Resultat von MONTGOMERY und YANG [23]. Es ist nicht bekannt, auf welchen Sphären freie $\mathbb{S}^1$-Aktionen existieren (vgl. jedoch die Resultate von WU-CHUNG HSIANG [19]). MONTGOMERY und YANG [23] haben die 7-Sphären genau bestimmt, auf denen freie $\mathbb{S}^1$-Aktionen existieren.

Zusätze bei der Korrektur

1. Eine neue Version von [23] enthält die Gleichung $\nu = \beta$ für beliebiges k.
2. Einen vollständigen Beweis für die Gleichung $\alpha = \beta$ bringt eine Arbeit von K. JÄNICH und dem Verf. (erscheint in Proceedings Coll. Alg. Geometry, Tata Institute, Bombay).

3. ŁOPEZ DE MEDRANO hat für ganzzahlige Homologiesphäre Σ_a^{4k-1} ($k=2$, $a=(a_0, a_1, \ldots, a_{2k})$ und alle a_j ungerade) bewiesen, daß die „normal invariants" von Σ_a^{4k-1}/T_a verschwinden und daß

$$\alpha(\Sigma_a^{4k-1}, T_a) = \tau(a_0, a_1, \ldots, a_{2k}) \bmod 16.$$

Vgl. hierzu auch P. ORLIK und C. P. ROURKE (Free involutions on homotopy $(4k+3)$-spheres, unveröffentlicht).

Literatur

1. ATIYAH, M. F., and R. BOTT: A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes I, Ann. of Math. **86**, 374—407 (1967).
2. —, u. F. HIRZEBRUCH: Charakteristische Klassen und Anwendungen, Enseignement Mathématique **7**, 188—213 (1961).
3. —, and I. M. SINGER: The index of elliptic operators III. Ann. of Math. **87**, 546—604 (1968).
4. BREDON, GLEN E.: Exotic actions on spheres (these Proceedings).
5. BRIESKORN, E.: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen, Math. Ann. **166**, 76—102 (1966).
6. — Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Invent. Math. **2**, 1—14 (1966).
7. — Singularitäten von Hyperflächen (unveröffentlichtes Manuskript).
8. BROWDER, W., and G. R. LIVESAY: Fixed point free involutions on homotopy spheres, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 242—245 (1967).

8a. BURDICK, R. O.: On the oriented bordism groups of $\mathbb{Z}_2$, Proc. Amer. Math. Soc. (erscheint demnächst).

9. CHERN, S. S., F. HIRZEBRUCH, and J. P. SERRE: On the index of a fibred manifold, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 587—596 (1957).
10. CONNER, P. E., and E. E. FLOYD: Differentiable Periodic Maps, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **33**. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1964.
11. DOLD, A.: Démonstration élémentaire de deux résultats du cobordisme, Séminaire de topologie et de géométrie différentielle, Paris, Mars 1959.
12. EELLS, J., and N. H. KUIPER: An invariant for certain smooth manifolds, Ann. di Mat. pura ed appl. **60**, 93—110 (1963).
13. HIRSCH, M. W., and J. MILNOR: Some curious involutions of spheres, Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 372—377 (1964).
14. HIRZEBRUCH, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Ann. **126**, 1—22 (1953).
15. — Differentiable manifolds and quadratic forms, Notes by Sebastian S. Koh, University of California, Berkeley 1962.
16. — Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **9**. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1962. Third enlarged edition, Topological methods in algebraic geometry, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.

17. — Singularities and exotic spheres, Séminaire Bourbaki, 1966/67, No 314.
18. —, u. K. H. Mayer: $0(n)$-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 57. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
19. Hsiang, Wu-Chung: A note on free differentiable actions of S^1 and S^3 on homotopy spheres, Ann. of Math. 83, 266—272 (1966).
20. Kervaire, M., and J. Milnor: Groups of homotopy spheres I, Ann. of Math. 77, 504—537 (1963).
21. López de Medrano, S.: Involutions of homotopy spheres and homology 3-spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 73, 727—731 (1967).
22. Milnor, J.: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math. 64, 399—405 (1956).
22a. — Differential Topology, Notes by J. Munkres, Princeton University, 1958.
23. Montgomery, D., and C. T. Yang: Differentiable actions on homotopy seven spheres III (unveröffentlichtes Manuskript).
24. Mumford, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Inst. Hautes Etud. Scient. Publ. Math. 9, Paris 1961.
25. Orlik, P., and F. Raymond: Actions of $SO(2)$ on 3-manifolds (these Proceedings).
26. v. Randow, R.: Zur Topologie von dreidimensionalen Baummannigfaltigkeiten, Bonner Math. Schriften Nr. 14, Bonn 1962.
27. Seifert, H.: Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, Acta Math. 60, 147—238 (1933).
28. Smale, S.: Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, Ann. of Math. 74, 391—406 (1961).
29. Thom, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv. 28, 17—86 (1954).
30. Wall, C. T. C.: Free piecewise linear involutions on spheres (unveröffentlichtes Manuskript).
31. Weil, A.: Numbers of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc. 55, 497—508 (1949).