Friedrich Hirzebruch (1926–2012). Trazos de su influjo, in memoriam

por

Sebastià Xambó Descamps

Aunque hablaremos del influjo universal de Friedrich Hirzebruch, voy a dedicar unas líneas, si puedo contar con la benevolencia del lector, a mi percepción del mismo en tres o cuatro momentos.

El primer impacto que recuerdo fue el descubrimiento, deslumbrante pero a la vez intimidatorio, de sus libros [10, 11] sobre *nuevos métodos topológicos en la geometría algebraica*, sin duda su obra maestra, y cuyo núcleo es una extraordinaria generalización (HRR) del teorema de Riemann-Roch. La versión inglesa [11], a cargo de Rolph Schwarzenberger, se aumentó con dos apéndices, uno del mismo Schwarzenberger, en el que se exponen diversas extensiones de los resultados de la primera versión (incluyendo la generalización de Alexander Grothendieck del teorema HRR, el teorema del índice de Atiyah-Singer y distintas aplicaciones), y otro de Armand Borel, que establece una sucesión espectral para fibrados holomorfos. Dicho descubrimiento ocurrió a principios de los años setenta en el seminario dirigido por Juan B. Sancho Guimerá en la Universitat de Barcelona, al cual concurrían, entre otras personas, Pedro L. García Pérez (quien distribuyó unas excelentes notas sobre teoría de haces y cohomología), Cristóbal García-Loygorri, Jesús Muñoz Díaz y Joaquín Ortega Aramburu.

Otra obra que tuvo un fuerte impacto, y que pareció algo más asequible, fue el legendario libro [1] sobre teoría K. Si para nosotros esta obra representaba un inicio, en realidad cerraba, como veremos después, una fructífera etapa de colaboración entre Atiyah y Hirzebruch que se extendió de 1959 a 1962 (salvo un artículo de 1970 que se comentará después, en la página 641). De hecho, este libro cubrió la función del que tenían planeado escribir conjuntamente pero que por diversas circunstancias nunca vio la luz (véase la página 642).

Ocho o nueve años después, viajé a Bonn para visitar a David Eisenbud, quien hizo una estancia de unas semanas en el Centro de Matemática Teórica (Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik, fundado en 1969). Hirzebruch era el presidente del Centro y así fue como conocí al gran personaje por primera vez. Un mito que resultaba ser una persona de carne y hueso, muy asequible, con un infalible sentido de la ironía y una devoción manifiesta por cumplir con sus deberes académicos, incluidas las clases en la universidad y, por supuesto, sus otras muchas responsabilidades.

Después, durante los años ochenta, acudí a varias ediciones de las Arbeitstagung (Jornadas de Trabajo), que Hirzebruch puso en marcha en 1957 y cuya asistencia fue creciendo año tras año hasta llegar a una elevada participación de científicos de

Hirzebruch dictó su última conferencia el 23 de abril de 2012 en Bonn, en el Instituto Max-Planck de Matemáticas del que había sido fundador y primer director. Foto cortesía de Stefan Friedl.

un gran número de países. Su influjo sobre todos los asistentes, tanto por la calidad de las conferencias como por la proximidad a los máximos exponentes de la creación matemática, es de los que no se olvidan. Tengo en particular un grato recuerdo de las largas conversaciones con otros participantes españoles, y muy especialmente con Pilar Bayer Isant, Carles Curràs Bosch y José Luis Vicente Córdoba. Para mí, este largo período de visitas anuales culminó con una estancia de dos meses, en junio y julio de 1988, en el Instituto Max-Planck de Matemáticas de Bonn que Hirzebruch había conseguido crear en 1980.

En los más de veinte años transcurridos desde entonces, las coincidencias con Hirzebruch fueron siempre significativas. Entre ellas destaco tres: su presencia en el Tercer Congreso Europeo de Matemáticas, en el cual coordinó una mesa redonda con el título *Building Networks of Cooperation in Mathematics* (véase [5]); el estudio de los trabajos conjuntos con Atiyah con ocasión de la preparación del artículo [20]; y, finalmente, su magistral intervención en los actos de homenaje a Michael Atiyah con motivo de su 80.º aniversario (cf. `http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/atiyah80.htm`).

La comunidad matemática internacional, y europea en particular, reconoce y está agradecida a la obra de Friedrich Hirzebruch, tanto por la calidad, profundidad y amplitud de sus aportaciones matemáticas, como por los extraordinarios resultados derivados de sus múltiples compromisos. Las autorizadas palabras que siguen representan óptimamente este sentimiento: en la sesión de la Sociedad Matemática Europea en Memoria de Hirzebruch [16], Gert-Martin Greuel escribe que fue «un gran matemático, un maestro y una magnífica persona»; Yuri I. Manin, que «ayudó inmensamente a muchos matemáticos de Alemania del Este a encontrar trabajo y continuar sus vidas científicas en un nuevo entorno»; Michael Atiyah, que «fui amigo y colaborador cercano de Fritz durante más de 50 años, lo que me permitió conocerle muy bien como matemático y como persona. Sus cualidades personales fueron cruciales para alcanzar sus logros. Era amable y considerado con todo el mundo, fuesen jóvenes o viejos, y tenía la habilidad de tratar cuestiones difíciles con acierto y delicadeza»; y Marta Sanz-Solé, presidenta de la Sociedad Matemática Europea, que «contribuyó de manera esencial a la reconstrucción de la investigación matemática alemana después de la II Guerra Mundial. Fundador y primer director del Instituto Max-Planck de Matemáticas en Bonn, ... un centro que ha proporcionado condiciones excelentes para los contactos internacionales y colaboraciones entre investigadores de todo el mundo, independientemente de su origen y género». No tengo duda de que nuestra comunidad matemática, deudora también del saber hacer de Hirzebruch, subscribe estas sentidas palabras.

Trayectoria académica

Friedrich Hirzebruch cursó la licenciatura en Matemáticas, Física y Lógica matemática en la Universidad Münster durante el período 1945–1950, con una estancia, el último año, en el Escuela Politécnica Federal de Zurich (Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich).

En el mismo año en que termina los estudios de licenciatura, con 23 años, obtiene el doctorado por la misma universidad. La tesis fue codirigida por Heinrich Adolph Behnke y Heinz Hopf.[1]

En el período 1952–1954, después de un contrato de dos años en el Instituto Matemático de Erlangen, es miembro del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Es un período extraordinariamente fructífero. Conoce, entre otros, a Kunihito Kodaira, Donald Spencer, Raoul Bott y Armand Borel, con quienes colabora (para más detalles, véase la página 641), y alcanza fama mundial con el teorema de la signatura y su generalización del teorema de Riemann–Roch (para más detalles, véase la sección «Teoremas HRR y GHRR», página 644). Es significativa, por ejemplo, la invitación de Cambridge, en 1954, ya que ocasiona el primer encuentro con Atiyah, a la sazón todavía estudiante de doctorado (leyó su tesis en 1955). De vuelta a Münster, Hirzebruch obtiene la habilitación un año más tarde (1955) y luego ocupa una plaza de profesor asistente en la Universidad de Princeton durante un curso (1955–1956). Es entonces cuando se consolida una estrecha relación con Michael Atiyah, visitante, también por un año, del Instituto de Estudios Avanzados. Aunque Atiyah es sólo dos años más joven que Hirzebruch, la diferencia de 'fase' en aquel momento era mayor, ya que Atiyah decidió cumplir dos años de servicio militar después de la guerra, mientras que Hirzebruch había quedado libre en junio de 1945 después de un corto período en el que fue prisionero de guerra de las fuerzas aliadas americanas —había sido movilizado en 1942, con sólo quince años, y destinado, hasta el final de la guerra, a artillería antiaérea.

[1] *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen* (Sobre superficies de Riemann 4-dimensionales de funciones analíticas multivaloradas de dos variables complejas).

A su regreso a Alemania en 1956, es nombrado catedrático de Matemáticas de la Universidad de Bonn, plaza que ocupa hasta su nombramiento como profesor emérito en 1993. En este largo período, juega un papel de primera magnitud en el resurgimiento de las matemáticas en su país, y en Europa en general. Fue decano de la Facultad de Ciencias de Bonn en el período 1962–1964, Presidente del Centro de Matemática Teórica (Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik; literalmente, Área de Investigación Especial en Matemática Teórica) entre 1969 y 1985, y Director del Instituto Max-Planck de Matemáticas en Bonn desde su fundación en 1980 hasta 1995, año en el que se jubiló. Tomando como modelo el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, este centro vino a cumplir, según la apreciación de Michael Atiyah, la misión que antaño desarrollaron Göttingen y Berlín. En este punto puede tener interés mencionar el artículo sobre la evolución del Instituto *Bonn's Max Planck Institute: A New Building and a New Era*, publicado en 1998 por Allyn Jackson en *Notices of the AMS* [14].

Hirzebruch fue Presidente de la Sociedad Matemática Alemana, la Deutsche Mathematiker-Vereinigung (1961–1962 y, de nuevo, en 1990, coincidiendo con el centenario de la DMV), y primer Presidente de la Sociedad Matemática Europea (octubre de 1990 a diciembre de 1994). Para más detalles sobre sus considerables logros en estos cargos, los textos incluidos en [16] constituyen una oportuna referencia. También fue Presidente del Comité de Programa del Congreso Internacional de Matemáticos de Berkeley (ICM-1986) y Presidente de Honor del de Berlín (ICM-1998).

Entre las muchas distinciones nacionales e internacionales que se le otorgaron (miembro de un gran número de academias y sociedades, doctor honoris causa por muchas universidades y receptor de un sinfín de medallas), cabe destacar el Premio Wolf (1988), el Premio Lobachevski de la Academia de Ciencias de la URSS (1990), el Premio Seki-Takakazu de la Sociedad Matemática Japonesa (1996, por haber «invitado muchos matemáticos japoneses a la Universidad de Bonn y al Instituto Max-Planck») y la Medalla Lomonosov de la Academia de Ciencias de Rusia (1997). La mención del premio Wolf, otorgado por la Fundación Wolf de Israel, fue «por sus destacados trabajos en los que se combina topología, geometría algebraica y diferencial, y teoría algebraica de números; y por su estímulo a la cooperación matemática y a la investigación».

He aquí algunos otros galardonados con el premio Wolf de Matemáticas con intereses cercanos a las áreas en las que trabajó Hirzebruch: Oscar Zariski (1981), Shiing-Shen Chern (1983), Kunihiko Kodaira (1984), John W. Milnor (1989), Raoul Bott (2000), Jean-Pierre Serre (2000), Phillip A. Griffiths (2008), David B. Mumford (2008). De hecho, Hirzebruch y Chern editaron dos interesantes volúmenes [6] en los que se pueden encontrar valiosos materiales sobre todos los galardonados con el premio Wolf de Matemáticas (bibliografías, *vitas*, escritos autobiográficos, trabajos distinguidos, conferencias y discursos sobresalientes) que cubren un amplio espectro de las matemáticas contemporáneas.

Colaboraciones

Hirzebruch dirigió o codirigió más de cincuenta tesis doctorales. He aquí una breve lista de algunos de sus alumnos más destacados (la selección se ha hecho teniendo en cuenta, primariamente, el número de 'descendientes'):

1963	Egbert Brieskorn	*Zur differentialtopologischen und analytischen Klassifizierung gewisser algebraischer Mannigfaltigkeiten.*
1964	Detlef Gromoll	*Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären.*
1964	Klaus Jänich	*Vektorraumbündel und der Raum der Fredholmschen Operatoren.*
1965	Wolfgang Meyer	*Kritische Mannigfaltigkeiten in Hilbertmannigfaltigkeite* (codirector: Wilhelm P.A. Klingenberg).
1966	Friedhelm Waldhausen	*Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.*
1967	Winfried Scharlau	*Quadratische Formen und Galois-Cohomologie.*
1969	Walter Neumann	S^1*-Actions and the Alpha-Invariant* (codirector: Klaus Jänich).
1972	Don B. Zagier	*Equivariant Pontrjagin Classes and Applications to Orbit Spaces.*
1972	Matthias Kreck	*Eine Invariante für stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten.*
1990	Lothar Götsche	*Hilbertschemata nulldimensionaler Unterschemata glatter Varietäten.*

Aproximadamente un tercio de los trabajos que publicó Hirzebruch tienen uno o más coautores [12, 13]. Aunque el resultado depende de cómo se hagan las cuentas, una estimación razonable del número total de coautores ronda las tres decenas. De ellos, sólo unos pocos aparecen en dos o más trabajos.

La colaboración más importante es con Michael Atiyah (9 trabajos). Le siguen Armand Borel (3), Don Zagier (3), Shiing-Shen Chern (3) y van de Ven (2). Entre los nombres que sólo aparecen en una colaboración, están Jean-Pierre Serre y Heinz Hopf.

Atiyah. Los artículos conjuntos con Michael Atiyah constituyen una parte substancial de la obra de ambos. Excluyendo dos de naturaleza más bien expositiva, son los siguientes:

- Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 276–281.

- Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés differentiables, *Bull. Soc. Math. France* **87** (1959), 383–396.
- Vector bundles and homogeneous spaces. En *Differential Geometry* (editado por C.B. Allendoerfer), AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **3** (1961), 7–38.
- Bott periodicity and the parallelizability of the spheres, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **57** (1961), 223–226.
- Analytic cycles on complex manifolds, *Topology* **1** (1962), 25–45.
- The Riemann-Roch theorem for analytic embeddings, *Topology* **1** (1962), 151–166.
- Spin-manifolds and group actions. En *Essays on topology and related topics: Mémoires dédiés à Georges de Rham* (editado por A. Haefliger y R. Narasimhan), Springer-Verlag (1970), 18–28.

En el caso de Atiyah, estos artículos se incluyeron en el segundo volumen (K-Theory) de sus *Collected Works*. En la introducción de este volumen, y refiriéndose a su libro *K-Theory*, escribe que «la intención era que la colaboración con Hirzebruch sobre teoría K culminase en un libro sobre el tema. Nos reunimos muchas veces para planificarlo, pero lamentablemente nunca pareció que tuviéramos el tiempo que se precisaba», con lo cual, continua, «este libro ha tenido que substituir al que queríamos escribir conjuntamente». El libro no se publicó hasta 1967, y de hecho consiste en las notas, recogidas por D.W. Anderson, del ciclo de conferencias que Atiyah impartió en Harvard en el otoño de 1964, aumentadas con la reproducción de dos artículos de Atiyah publicados en 1966 en el *Quart. J. Math.* (titulados *Power operations in K-Theory* y *K-Theory and reality*).

BOREL. Los tres artículos conjuntos con Armand Borel llevan por título *Characteristic classes of homogeneous spaces* y se publicaron en el *Amer. J. Math.* en tres partes: **80** (1958), 458–538; **81** (1959), 315–382; y **82** (1960), 491–504, respectivamente.

En el primero se exponen detalladamente las técnicas cohomológicas de estudio de los fibrados vectoriales desarrolladas por los autores y en el segundo se presentan diversas aplicaciones. El tercero es un complemento de los dos primeros en el que se aportan diversos refinamientos.

ZAGIER. El caso de Don Zagier es algo especial, ya que, como hemos visto anteriormente, se doctoró bajo la dirección de Hirzebruch en 1972. Los tres trabajos conjuntos son un libro y dos artículos:

- *The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory*, Mathematics Lecture Series **3**, Publish or Perish, 1974. xii + 262 p.
- Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus, *Invent. Math.* **36** (1976), 57–113.

- Classification of Hilbert modular surfaces. En *Complex analysis and algebraic geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo (1977), 43–77.

El inicio de la recensión del libro en los *Mathematical Reviews*, a cargo de Harvey Cohn, es bastante impactante: «El punto de vista de este libro es potencialmente tan revolucionario que sólo se puede realizar una adecuada recensión y una adecuada apreciación de su punto de vista teniendo en cuenta futuros desarrollos. Básicamente, el papel de la topología en la teoría de números ha evolucionado desde los métodos locales, como la teoría p-ádica, hasta métodos globales como los números de intersección de clases de homología. La forma más alta del arte es el teorema de M.F. Atiyah e I.M. Singer, que en la introducción se substancia con la observación de que, a un nivel elemental, la teoría de números analítica debe ser topológica en razón a que su herramienta más común, el teorema de Cauchy de los residuos, es un caso especial del teorema de Atiyah-Singer».

Vale la pena citar también el primer párrafo del prefacio escrito por los autores: «Aunque quizás el título no lo haga pensar, este libro versa sobre la relación entre ciertos corolarios del teorema del índice de Atiyah-Singer y algunos objetos bastante clásicos de la teoría de números. El hecho de que *existe* una conexión fue percibido por un buen número de personas, incluyendo (independientemente) los autores. Y puesto que ni nosotros, ni nadie más que conozcamos, sabe *por qué* tal conexión debiera existir, nos pareció un tema ideal para un libro destinado a presentar el enigma a la comunidad matemática, para su sorpresa o diversión, según fuere el caso».

Los dos artículos son bastante técnicos. En el de *Inventiones*, por ejemplo, se determinan los números de intersección de ciertas curvas sobre las superficies modulares de Hilbert y se muestra que existen formas modulares cuyos coeficientes de Fourier coinciden con estos números.

Chern. La firma de Shiing-Shen Chern aparece, junto con la de Serre, en el artículo *On the index of a fibered manifold* publicado en *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 587–596. El propósito del artículo es demostrar que, bajo ciertas hipótesis sobre un fibrado $E \to B$ de fibra F, la signatura de E es el producto de las signaturas de B y de F. Las hipótesis son que E, B y F son variedades compactas, conexas y orientadas, con orientaciones compatibles, y que la acción natural de $\pi_1(B)$ en la fibra F es trivial. La *signatura* de una variedad compacta orientada X de dimensión $4k$, denotada $\tau(V)$, se define como la signatura de la forma de intersección $H^{2k}(X) \times H^{2k}(X) \to \mathbb{Z}$, o como 0 si la dimensión de X no es divisible por 4.

La otra colaboración de Chern con Hirzebruch es la edición, ya mencionada, de los dos volúmenes [6] dedicados a los premios Wolf de Matemáticas.

van de Ven. Los dos trabajos conjuntos versan sobre superficies de Hilbert modulares:

- Hilbert modular surfaces and the classification of algebraic surfaces, *Invent. Math.* **23** (1974), 1–29.

- Minimal Hilbert modular surfaces with $p_g = 3$ and $k^2 = 2$, *Amer. J. Math.* **101** (1979), 132–148.

TEOREMAS HRR Y GHRR

Analicemos un poco más de cerca el teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch (HRR) y las generalizaciones que le siguieron, especialmente la de Grothendieck (GHRR). Lo que sigue es una adaptación de algunos fragmentos del artículo [20], que en todo caso pretende incluir una presentación, con notaciones algo distintas, de las nociones fundamentales introducidas en [10, 11]. Tal como refiere Atiyah en [2], el teorema HRR señala la mutación fecunda del viejo estilo de la geometría algebraica a uno nuevo en el cual el papel principal corresponde a la teoría de haces que Henri Cartan y Jean-Pierre habían recién introducido.

El libro [10] ya contiene lo que muy posiblemente fue el primer tratamiento axiomático de las clases de Chern en geometría algebraica, incluyendo el principio de descomposición (*splitting principle*), basado a su vez en ideas de Chern. Fueron estas las fuentes que inspiraron la presentación de Alexander Grothendieck [9],[2] una de las piedras angulares de GHRR, cuya demostración, por cierto, fue esbozada por Grothendieck en las primeras Arbeitstagung (1957) y publicada subsiguientemente por Armand Borel y Jean-Pierre Serre en [4].[3]

CONVENCIONES. Los términos *variedad*, *variedad analítica*, *variedad holomorfa* y *variedad algebraica* significan, cuando se usan sin más cualificaciones, variedad diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ compacta, variedad analítica real compacta, variedad analítica compleja compacta y variedad algebraica lisa y completa, respectivamente.

CLASES DE CHERN. Dado un fibrado vectorial *complejo* E (en adelante fibrado) sobre una variedad V, su *clase total de Chern* tiene la forma

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_r(E) \in H^{2*}(V, \mathbb{Z}),$$

donde r es el rango de E (la dimensión de cualquier fibra de E) y $c_j(E) \in H^{2j}(V, \mathbb{Z})$ (j-ésima clase de Chern de E). Por ejemplo, si L es un fibrado complejo de rango 1 (diremos que es un *fibrado de línea*), entonces $c(L) = 1 + \ell$, siendo $\ell = c_1(L) \in H^2(V, \mathbb{Z})$. Recordemos también que si L' es otro fibrado de línea y $c_1(L') = \ell'$, entonces $c_1(L \otimes L') = \ell + \ell'$.

[2] En la introducción de este artículo leemos que «Cet exposé est inspiré du livre de HIRZEBRUCH d'une part (ou les *propriétés formelles* essentielles caractérisant une théorie des classes de Chern étaint bien mises en évidence), et d'une idée de CHERN [en un artículo de 1953 en el *A.J.M.*] qui consiste a utiliser la structure multiplicative de l'anneau des classes de cycles sur le fibré en espaces projectives $P(E)$ associé a E, pour parvenir a une *construction* effective des classes de Chern».

[3] Resulta un poco irónico que [9] apareciera como apéndice de este artículo. Sus autores aclaran, sin embargo, que «Ce qui suit constitue les notes d'un séminaire tenu à Princeton en automne 1957 sur les travaux de GROTHENDIECK; les résultats nouveaux qui y figurent sont dus à ce dernier; notre contribution est uniquement de nature rédactionnelle».

La clase $c(E)$ es multiplicativa (*fórmula de Whitney*):

$$c(E \oplus E') = c(E) \cdot c(E').$$

Por ejemplo, si $L_1, \ldots, L_r$ son fibrados de línea y $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$, entonces $c(E) = (1+x_1)\cdots(1+x_r)$, $x_i = c_1(L_i)$, de lo cual resulta que $c_j(E) = \sigma_j(x_1, \ldots, x_r)$ (el j-ésimo polinomio simétrico elemental en $x_1, \ldots, x_r$).

El *principio de descomposición* asegura que para trabajar con clases de Chern de fibrados no se pierde generalidad suponiendo que son suma directa de fibrados de línea. En términos prácticos esto significa que si E es un fibrado vectorial complejo de rango r, entonces se puede suponer que existen símbolos auxiliares $x_1, \ldots, x_r$, que denominamos *raíces* de E, que cumplen $c(E) = (1+x_1)\cdots(1+x_r)$ y, por tanto, $c_j(E) = \sigma_j(x_1, \ldots, x_r)$.

Veamos algunos ejemplos. Empecemos por la determinación de las clases de Chern de $E \otimes E'$ en función de las clases de Chern de E y de E'. Bastará considerar un caso concreto que contenga la esencia del procedimiento. Si las raíces de E son x_1 y x_2 (así el rango de E es 2) y $\ell = c_1(L)$ (de modo que L es un fibrado de línea), entonces las raíces de $E \otimes L$ son $y_1 = x_1 + \ell$ e $y_2 = x_2 + \ell$, con lo cual $c_1(E \otimes L) = y_1 + y_2 = c_1(E) + 2\ell$ y $c_2(E \otimes L) = y_1 \cdot y_2 = (x_1 + \ell)(x_2 + \ell) = c_2(E) + c_1(E)\ell + \ell^2$.

Análogamente se tiene que $c_j(\bar{E}) = (-1)^j c_j(E)$, siendo $\bar{E}$ el fibrado conjugado de E. En efecto, si L tiene rango 1, entonces $c_1(\bar{L}) = -c_1(L)$, ya que $\bar{L} \otimes L = \mathbf{1}_V$, de manera que la raíces de $\bar{E}$ son $-x_1, \ldots, -x_r$ si $x_1, \ldots, x_r$ son las raíces de E.

Otro ejemplo es el *carácter de Chern* de E, $\mathrm{ch}(E)$, el cual se define expresando la función simétrica $e^{x_1} + \cdots + e^{x_r}$ en términos de los polinomios simétricos elementales $\sigma_j(x_1, \ldots, x_r)$, es decir, como una función de las clases de Chern $c_j(E)$. Fijémonos que $\mathrm{ch}(E \oplus E') = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(E')$ y $\mathrm{ch}(E \otimes E') = \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{ch}(E')$.

Clases de Pontrjagin. Sea E un fibrado *real* de rango r sobre una variedad V y $s = \lfloor r/2 \rfloor$. Las *clases de Pontrjagin* de E, $p_j(E) \in H^{4j}(V, \mathbb{Z})$, $j = 0, \ldots, s$, se definen por la fórmula $p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes \mathbb{C})$. En el caso en que E esté orientado y $r = 2s$, las raíces de $E \otimes \mathbb{C}$ tienen la forma $x_1, -x_1, \ldots, x_s, -x_s$ y $c(E) = \prod_{i=0}^{i=s}(1 - x_i^2) = \sum_{j=0}^{j=s}(-1)^j \sigma_j(x_1^2, \ldots, x_s^2)$, lo cual nos dice que las clases de Chern de orden impar de $E \otimes \mathbb{C}$ son nulas y que $p_j(E) = \sigma_j(x_1^2, \ldots, x_s^2)$.

Clases de Hirzebruch. Sea $q(x) = \sum_{i \geq 0} q_i x^i \in \mathbb{Q}[[x]]$ con $q_0 = 1$. Sean $x_1, x_2, \ldots$ indeterminadas. Para cada número entero positivo n, el producto $q(x_1)\cdots q(x_n)$ es simétrico respecto de $x_1, \ldots, x_n$, y por tanto se puede escribir en la forma $1 + Q_1(\sigma_1) + Q_2(\sigma_1, \sigma_2) + \cdots + Q_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) + \cdots$, donde los últimos $\cdots$ representan términos de grado $> n$ en las x_i y siendo $\sigma_j = \sigma_j(x_1, \ldots, x_n)$. El polinomio Q_j ($j = 1, \ldots, n$) tiene grado j como polinomio en las x_i y peso j como polinomio en las σ_i (considerando que σ_i tiene peso i), y no es difícil ver que no depende de n si $n \geq j$.

Sea ahora $H = \bigoplus_{i \geq 0} H^i$ una $\mathbb{Q}$-álgebra conmutativa graduada y $h = 1 + h_1 + h_2 + \cdots \in H$. Si escribimos $Q(h) = 1 + Q_1(h_1) + Q_2(h_1, h_2) + \cdots$, es fácil comprobar, si $h' \in H$ también cumple $h'_0 = 1$, que $Q(hh') = Q(h)Q(h')$. En particular podemos definir, si E es un fibrado complejo sobre una variedad V, el elemento $Q(E) = Q(c(E)) = 1 + Q_1(c_1) + Q_2(c_1, c_2) + \cdots \in H^{2*}(V, \mathbb{Q})$, donde $c_j = c_j(E)$, y es claro que $Q(E \oplus E') = Q(E) \cdot Q(E')$. De $Q_n(E) \in H^{2n}(V, \mathbb{Q})$ diremos que es la *q-clase de Hirzebruch* de E.

En el caso en que V sea holomorfa y $E = T_V$ (el fibrado tangente de V), hablaremos de la *q-clase de Hirzebruch* de V, y la denotaremos $Q_n(V)$, es decir, $Q_n(V) = Q_n(T_V)$. El *q-género* (de Hirzebruch) de V se define como $\int_V Q_n(V) \in \mathbb{Q}$ (ponemos $\int_V \alpha$, $\alpha \in H^{2n}(V, \mathbb{Q})$, para denotar el valor $\alpha\,[V]$ de α sobre el ciclo fundamental $[V]$ de V).

CLASSES DE TODD. Dado un fibrado complejo E sobre una variedad V, las td-clases de Hirzebruch $\mathrm{Td}_j(E)$ que corresponden a la serie

$$\mathrm{td}(x) = x/(1 - e^{-x}) = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}x^2 + \cdots \in \mathbb{Q}[[x]]$$

se denominan *clases de Todd* del fibrado E. En el caso en que V es holomorfa y $E = T_V$, obtenemos las clases de Todd de V, $\mathrm{Td}_j(V)$. El td-género de V, $\int_V \mathrm{Td}_n(V) \in \mathbb{Q}$, se conoce como el *género de Todd* de V.

La razón que llevó a Hirzebruch a escoger la serie td es que es la única serie q para la cual el q-género de los espacios proyectivos es 1, condición que es muy natural, como veremos en el siguiente párrafo, en el contexto de su trabajo.

TEOREMA DE HRR. El teorema de HRR afirma, para cualquier fibrado holomorfo E sobre una variedad algebraica V, que

$$\chi(V, E) = \int_V \{\mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{Td}(X)\}_n,$$

siendo $\chi(V, E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h^i(V, E)$, $h^i(V, E) = \dim H^i(V, E)$, $n = \dim(V)$. En el caso particular en que $E = \mathbf{1}_V$, la fórmula nos da que el género de Todd, $\int_V \mathrm{Td}_n(V)$, coincide con $\chi(V, \mathcal{O}_V)$. Sorprendentemente, pues, el género de Todd de V es un número entero. Nótese que la fórmula implica que el género de Todd de $V = \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ es 1, ya que $\chi(V, \mathcal{O}_V) = 1$, y esto explica, como se ha comentado en el párrafo anterior, la elección de la serie td para definir el género de Todd.

TEOREMA DE GHRR. Este teorema establece que si $f : Y \to X$ es un morfismo propio de variedades algebraicas lisas, entonces

$$f_*(\mathrm{Td}(Y) \cdot \mathrm{ch}(E)) = \mathrm{Td}(X) \cdot \mathrm{ch}(f_![E]) \text{ en } H^*(X, \mathbb{Q}),$$

donde E es cualquier fibrado algebraico (u holomorfo en el caso complejo) sobre Y. La aplicación $f_* : H^*(Y, \mathbb{Q}) \to H^*(X, \mathbb{Q})$ es la aplicación dual de Poincaré de la aplicación natural $f^* : H^*(X, \mathbb{Q}) \to H^*(Y, \mathbb{Q})$; $[E] \in K(X)$ es la clase de E en el grupo de Grothendieck de X y $f_! : K(Y) \to K(X)$ es el *homomorfismo admirable* de

Grothendieck, es decir, $f_![E] = \sum_{j\geq 0}(-1)^j[R^j f_*(E)]$, donde $R^j f_* E$ son las imágenes directas de orden superior de E considerado como haz coherente sobre Y.

El teorema GHRR generaliza significativamente el teorema HRR, ya que se obtiene de GHRR cuando Y se reduce a un punto.

Género de Todd para variedades casi-complejas. Hemos visto que el género de Todd es un número entero para variedades algebraicas. Ahora bien, la definición de este género tiene sentido para variedades casi-complejas (por tener sus espacios tangentes una estructura compleja), y una de las consecuencias interesantes de la versión diferenciable del teorema de GHRR, debida a Atiyah y Hirzebruch [3], es que, para estas variedades, el género de Todd es también un número entero.

L-género y teorema de la signatura. Con las mismas notaciones de los párrafos anteriores, se define la clase

$$L(E) = \prod_{i=1}^{s} \frac{x_i/2}{\tanh x_i/2} = 1 + L_1(E) + \cdots + L_s(E) \in H^{4*}(V, \mathbb{Q}).$$

En esta expresión, $L_j(E)$ es un polinomio de peso j en les clases de Pontrjagin $p_1(E), \ldots, p_s(E)$.

Si V es una variedad orientada de dimensión n, el L-género de V es 0 si n no es múltiplo de 4 y es el número racional $L(V)$ definido por las expresión $\int_V L_k(T_V)$ si $n = 4k$.

El teorema de la signatura de Hirzebruch, que fue un importante ingrediente en la demostración de HRR, afirma que $L(V) = \tau(V)$. En particular, $L(V)$ es un número entero.

$\widehat{A}$-género. Si E es un fibrado vectorial orientado de rango $r = 2s$ sobre una variedad V, y $x_1, \ldots, x_s$ son los símbolos tales que $p_j(E) = \sigma_j(x_1^2, \ldots, x_s^2)$ (véase el párrafo «Clases de Pontrjagin», página 645), se define la clase $\widehat{A}(E)$ por la fórmula

$$\widehat{A}(E) = \prod_{i=1}^{i=s} \frac{x_i/2}{\operatorname{senh} x_i/2} = 1 + \widehat{A}_1(E) + \cdots + \widehat{A}_s(E) \in H^{4*}(V, \mathbb{Q}).$$

En esta expresión, $\widehat{A}_j(E)$ es un polinomio de peso j en las clases de Pontrjagin $p_1(E), \ldots, p_s(E)$.

Si V es una variedad orientada de dimensión n, el $\widehat{A}$-género de V es 0 si n no es múltiplo de 4 y es el número racional $\widehat{A}(V)$ definido por la expresión $\int_V \widehat{A}_k(T_V)$ si $n = 4k$. Para este género, Atiyah y Hirzebruch habían demostrado en [3] que es un número entero para las llamadas variedades espinoriales, lo cual fue una de las pistas fundamentales en el camino hacia el teorema del índice.

Chern, en la recensión de [10] en los *Mathematical Reviews*, dice: «Este libro usa muchos de los profundos resultados de distintas ramas de las matemáticas, y puede ser difícil incluso para lectores con una buena preparación. En realidad, debemos darnos cuenta de que es esencialmente un artículo original, con abundante material introductorio, y muy bien escrito. Si el lector consigue llegar a la cima, el panorama es altamente recomendable».

Como dice Yuri I. Manin en [16], «Quizás el teorema de Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck, que fusionó y coronó los esfuerzos de docenas de grandes creadores de todos los rincones de Europa, merece ser colocado en la bandera de la Unión Europea más que ningún otro símbolo».

¿Pájaro y Zorro?

Esta sección sólo pretende ser un juego recreativo sobre la personalidad de Hirzebruch.

El físico y matemático Freeman Dyson divide a los matemáticos, refiriéndose a su estilo cognitivo, en *birds* y *frogs* ([8] y prólogo a [15]).[4] Es decir, *Pájaros* y *Ranas*, con la esperanza de que no se alteren las connotaciones neutras de las etiquetas en inglés. La tesis principal de Dyson, que se autoclasifica como *Rana*, es que ambos tipos son indispensables para el progreso de las matemáticas. Como ejemplos de *Rana* pone, además de a sí mismo, a Francis Bacon, Abram Besicovich (con su sorprendente solución del problema de Kakeya) y John von Neumann. Como ejemplos de *Pájaro*, cita a René Descartes, David Hilbert y Nicolás Bourbaki.

Como toda dicotomía, la clasificación de Dyson se puede entender mejor como una polaridad, en la cual cada matemático estaría situado en un cierto punto de un segmento continuo entre los extremos. En su caso, por ejemplo, el extraordinario artículo [7], con el cual se adelantó a Feynman, Schwinger y Tomonaga en la formulación de la electrodinámica cuántica, añade un considerable peso al platillo *Pájaro* de la balanza, de manera que de hecho Dyson me parece tanto o más *Pájaro* que *Rana*.

En el caso de Hirzebruch, creo que no hace falta indagar mucho para concluir que fue primordialmente *Pájaro*, como ya indica el título de [10, 11] y los muchos comentarios que hemos encontrado. Como muestra fuera del ámbito de las matemáticas, basten las escuetas pero muy significativas palabras del obituario publicado por el *New York Times* [17] con las que se subraya que su contribución a la «unificación de distintas partes de las matemáticas produjo nuevas herramientas y campos de investigación». No obstante, cabe decir también que su virtuosismo en los cálculos le confiere merecidamente un cierto peso a *Rana*.

Para la faceta organizativa de Hirzebruch, puede ser interesante aplicarle la polaridad de Philip E. Tetlock [19], tal como se formula y analiza en [18, p. 53]: «Tetlock clasificó sus expertos a lo largo de un espectro entre dos extremos que denominó

[4]La primera frase de ambos artículos es: «Some mathematicians are birds, others are frogs.» Supongo que se podría decir algo parecido de los físicos. Su caracterización metafórica es como sigue: «Los *birds* vuelan alto en el cielo y escrutan amplias vistas de las matemáticas hasta el lejano horizonte. Se deleitan en conceptos que unifican el pensamiento e interrelacionan problemas diversos de distintas partes del paisaje. Los *frogs* viven en el barro abajo y sólo ven las flores que crecen a su alrededor. Se deleitan en los detalles de objetos particulares, y resuelven los problemas de uno en uno».

Zorros [foxes] y *Erizos* [hedgehogs]», al modo en que ya lo hizo, en el siglo VII a.C., el poeta griego Arquíloco, para el cual «el zorro conoce muchas pequeñas cosas, el erizo una única gran cosa». También aquí optamos por la traducción de las etiquetas, y con la misma esperanza y deseo de que no se adultere la neutralidad original.

Los *Zorros* son cautos y empíricos, toleran la complejidad, pueden incorporar ideas de disciplinas diversas y son flexibles. Los logros de Hirzebruch, y la forma como desempeñó sus cargos y gestionó las dificultades, sugieren un alto peso para *Zorro* y más bien bajo, o nulo, para *Erizo*. Los comentarios que hemos recogido claramente dan soporte a esta conclusión.

Para terminar, me parecen muy oportunas las palabras que el físico Comrun Vafa escribió como prefacio al libro [21] sobre los fundadores de la teoría del índice:

> «Atiyah, Bott, Hirzebruch y Singer no sólo son matemáticos de primera clase que transformaron profundamente las matemáticas, sino que pertenecen a una rara clase de investigadores cuyos intereses e influencia llegan mucho más allá de las fronteras convencionales entre áreas de conocimiento. Como físico he sido testigo del impacto de su trabajo sobre un amplio abanico de temas en física teórica, desde la aplicación de teoremas del índice para contar generaciones de partículas elementales y determinar condiciones de consistencia para teorías cuánticas de campos, a los teoremas de periodicidad y su papel en las teorías de cuerdas y D-branas, o hasta la potencia de los teoremas de localización en cálculos de funciones de correlación física; testigo, una y otra vez, de una vasta malla de temas sobre los cuales su investigación ha tenido un impacto. Además, sus cálidas personalidades, combinadas con una clara visión de la unidad de las matemáticas y la física, han sido una verdadera inspiración para muchos físicos de mi generación.»

Referencias

[1] M.F. Atiyah, *K-Theory*, Benjamin, 1967.

[2] M.F. Atiyah, Friedrich Hirzebruch — An appreciation, *Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (May 2-7, 1993)* (M. Teicher, ed.), pp. 1–5, Gelbart Research Institute for Mathematical Sciences and Emmy Noether Research Institute of Mathematics, Bar-Ilan University (Tel Aviv, Israel), 1996, distribuido por la AMS.

[3] M.F. Atiyah y F. Hirzebruch, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 276–281.

[4] A. Borel y J.-P. Serre, Le théorème de Riemann-Roch, *Bulletin de la S.M.F.* **86** (1958), 97–136.

[5] C. Casacuberta, R.M. Miró, J. Ortega y S. Xambó (editores), *Mathematical glimpses into the 21st century (Proceedings of the Round Table Program of the Third European Congress of Mathematics, Barcelona, 2000)*, CIMNE y SCM, 2001.

[6] S.S. CHERN Y F. HIRZEBRUCH, *Wolf prize in mathematics, I, II*, World Scientific, 2000, 2001.

[7] F.J. DYSON, The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman, *Phys. Rev.* **75** (1949), no. 3, 486–502.

[8] F.J. DYSON, Birds and frogs, *Notices of the AMS* **56** (2009), no. 2, 212–223.

[9] A. GROTHENDIECK, La théorie des classes de Chern, *Bulletin de la S.M.F.* **86** (1958), 137–154.

[10] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik un ihrer Grezgebiete, vol. 9, Springer-Verlag, 1956.

[11] F. HIRZEBRUCH, *Topological methods in algebraic geometry*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 131, Springer-Verlag, 1966.

[12] F. HIRZEBRUCH, *Collected papers, I (1951–1962)*, Springer-Verlag, 1987.

[13] F. HIRZEBRUCH, *Collected papers, II (1963–1987)*, Springer-Verlag, 1987.

[14] A. JACKSON, Bonn's Max Planck Institute: A New Building and a New Era, *Notices of the AMS* **45** (1998), no. 5, 582–588.

[15] Y. I. MANIN, *Mathematics as metaphor. Selected essays*, American Mathematical Society, 2007.

[16] M. SANZ-SOLÉ, M. ATIYAH, C. BÄR, G.-M. GREUEL Y Y. I. MANIN, Friedrich Hirzebruch memorial session at the 6th European Congress of Mathematics (Kraków, July 5th, 2012), *Newsletter of the EMS* **85** (2012), 12–20.

[17] B. SCHECHTER, Friedrich Hirzebruch, mathematician, is dead at 84, *New York Times*, June 10, 2012.

[18] N. SILVER, *The signal and the noise*, Penguin Press, 2012.

[19] P.E. TETLOCK, *Expert political judgment*, Princeton University Press, 2006.

[20] S. XAMBÓ, Sir Michael Atiyah. Vida i obra, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* **24** (2009), no. 2, 137–208.

[21] S.-T. YAU (EDITOR), *The founders of index theory. Reminiscences of and about Sir Michael Atiyah, Raoul Bott, Friedrich Hirzebruch, and I.M. Singer*, International Press, 2003, 2009.

SEBASTIÀ XAMBÓ DESCAMPS, DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA II, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA, C/ JORDI GIRONA 1-3, 08034 BARCELONA

Correo electrónico: `sebastia.xambo@upc.edu`

Página web: `http://www-ma2.upc.edu/sxd/`