

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ ЧЖЕНЯ¹⁾ (по диссертации Т. Хёфера, Бонн, 1984)

Ф. Хирцебрух (Бонн, ФРГ)

Для гладкой алгебраической поверхности X определены числа Чжэня $c_1^2(X)$ и $c_2(X)$: $c_2(X)$ совпадает с эйлеровой характеристикой X , а $c_1^2(X)$ есть индекс самопересечения канонического дивизора X . Для поверхностей общего типа эти числа удовлетворяют неравенству Мияоки — Яо $c_1^2 \leq 3c_2$ (см. [8] и [11]), причем равенство достигается в точности для поверхностей, универсальная накрывающая которых есть единичный шар в $\mathbb{C}^2$, определяемый условием $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$ (см. [11] и [9], § 2, по поводу трудной и [2] легкой импликаций в этой эквивалентности). Если $c_1^2 = 3c_2$, то автоматически $c_2 > 0$; в самом деле, c_2 есть объем поверхности (нормализованной формой Гаусса — Бонне) в комплексной гиперболической метрике, индуцированной метрикой шара.

Мы хотим построить поверхности общего типа с экстремальными числами Чжэня ($c_1^2 = 3c_2$), которые являются разветвленными накрытиями проективной плоскости, ветвящимися вдоль прямых. Это исследование было начато в [3], однако значительно более продвинутая теория и новые примеры принадлежат Томасу Хёферу (готовится диссертация в Бонне). Эта заметка посвящена изложению его работы.

Многое здесь опущено. Например, мы рассматриваем лишь тот случай, когда поверхность является фактором шара по дискретной группе Γ его автоморфизмов, причем Γ действует свободно и с компактным фактор-пространством. Хёфер допускает, чтобы Γ имела кручение и параболические точки (на бесконечности), и реализует такие факторы как разветвленные накрытия плоскости. Его формулы (надлежащим образом модифицированные) справедливы и в этой более общей (нежели у нас) ситуации.

1. Пусть S — алгебраическая поверхность, C_i ($i = 1, \dots, t$) — конечный набор попарно различных гладких неприводимых кривых на S таких, что кривая $C = \sum C_i$ имеет лишь простые двойные точки. Пусть Y — гладкая алгебраическая поверхность, являющаяся накрытием Галуа над S так, что накрывающее отображение

$$\pi: Y \rightarrow S$$

не разветвлено вне C . Тогда для каждой точки $p \in Y$ существуют локальные координаты (u, v) на Y с центром в p и локальные координаты (z, w) на S с центром в $\pi(p)$ такие, что π задается функциями

$$1) \quad z = u^a, \quad w = v^b,$$

¹⁾ Перевод с английского И. А. Скорнякова.

где a и b — положительные целые числа. Если a или b больше 1, то $p \in \pi^{-1}(C)$. Припишем каждой C_i положительное целое a_i такое, что для каждой гладкой точки q кривой C , лежащей на C_i , отображение π локально (в окрестности $p \in \pi^{-1}(q)$) задается в виде (1) с $a = a_i, b = 1$. Если $q \in C_i \cap C_j, i \neq j$, то для $p \in \pi^{-1}(q)$ π локально задается в виде (1) с $a = a_i, b = a_j$. Наконец, если степень накрытия π равна d , количество прообразов такой точки q равно $d/(a_i a_j)$. Накрытие Y над S с описанными свойствами будем называть *хорошим* относительно кривых C_i и чисел ветвления a_i .

2. Как и в [3], рассмотрим комплексную проективную плоскость $P_2(\mathbb{C})$ с однородными координатами $z_0: z_1: z_2$ и конфигурацию C_i различных прямых $L_1, \dots, L_k$, задаваемых уравнениями $l_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$), где l_i — линейные формы от z_0, z_1, z_2 . Для каждой точки p плоскости пусть r_p — число прямых конфигурации, проходящих через p , а для $r \geq 2$ t_r — число точек p таких, что $r_p = r$. Имеем

$$(2) \quad \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{r \geq 2} t_r \frac{r(r-1)}{2}.$$

Раздуем точки плоскости p_j , в которых $r_{p_j} \geq 3$ для данной конфигурации прямых. Получим алгебраическую поверхность S с набором кривых C_i такую, как в п. 1. Именно, в множество $\{C_i\}$ входят прообразы прямых исходной конфигурации (которые мы будем по-прежнему обозначать $L_1, \dots, L_k$) и прямые $E_1, \dots, E_s$, полученные раздутием точек $p_j, 1 \leq j \leq s, s = \sum_{r \geq 2} t_r$ (число t п. 1 здесь равно $k + s$).

Припишем целые веса ≥ 2 $n_1, \dots, n_k$ «старым» прямым $L_1, \dots, L_k$ и целые веса ≥ 1 $m_1, \dots, m_s$ — «новым» прямым $E_1, \dots, E_s$ или, что эквивалентно, точкам p_j . Указанный набор данных будем называть *взвешенной конфигурацией* прямых на плоскости. (Каждая прямая имеет вес n_i , каждая точка пересечения p_j с $r_{p_j} \geq 3$ имеет вес m_j .) По взвешенной конфигурации строится поверхность S и набор кривых на ней $L_1, \dots, L_k, E_1, \dots, E_s$ с числами ветвления $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_s$ (которые в п. 1 обозначались a_i). Пусть Y — хорошее накрытие S относительно $L_1, \dots, L_k, E_1, \dots, E_s$ и заданных чисел ветвления. (Мы не затрагиваем здесь трудный вопрос о существовании такой поверхности Y . Частичные результаты по этому поводу см. в [6]. Очень специальный случай $n_i = m_j = n$ рассмотрен в [3].)

Можно (и в принципе несложно) вычислить числа Чженя Y достаточно элементарным способом, как это сделано в [3] для специального случая, однако при произвольном наборе весов получаемые так формулы неудобны для использования. Хёфер нашел несколько замечательных формул, вычисляющих $(3c_2(Y) - c_1^2(Y))/d$ в терминах набора весов и комбинаторных свойств (невзвешенной) конфигурации.

Пусть σ_i — число точек p с $r_p \geq 3$, лежащих на i -й прямой из заданной конфигурации k прямых на плоскости. Рассмотрим симметричную матрицу A размера $k \times k$ с элементами

$$(3) \quad A_{ij} = \begin{cases} 3\sigma_i - 4 & (i = j), \\ 2 & (i \neq j, \quad p \in L_i \cap L_j \text{ и } r_p = 2), \\ -1 & (i \neq j, \quad p \in L_i \cap L_j \text{ и } r_p \geq 3). \end{cases}$$

Свяжем с каждой из k прямых вещественную переменную x_i , и пусть x — вектор $(x_1, \dots, x_k)$. Свяжем с каждой из s точек p_j с $r_{p_j} \geq 3$ вещественную переменную y_j . Для каждой p_j с $r_{p_j} \geq 3$ рассмотрим форму

$$p_j(x, y) = 2y_j + \sum_{p_j \in L_i} x_i, \quad \text{где } y = (y_1, \dots, y_s).$$

Ф о р м у л а Х ё ф е р а. Для данной алгебраической поверхности Y (хорошего накрытия S степени d относительно $L_1, \dots, L_k, E_1, \dots, E_s$ и заданных чисел ветвления $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_s$) имеем

$$(4) \quad (3c_2(Y) - c_1^2(Y))/d = \frac{1}{4} \left(x^t A x + \sum_{j=1}^s p_j(x, y)^2 \right),$$

где $x_i = 1 - \frac{1}{n_i}$ и $y_j = -1 - \frac{1}{m_j}$.

Итак, формула Хёфера дает выражение для $(3c_2(Y) - c_1^2(Y))/d$ в виде квадратичной формы в $\mathbb{R}^{k+s}$ с координатами x_i, y_j . Эта квадратичная форма зависит только от невзвешенной конфигурации.

Сумма элементов i -й строки матрицы A равна $3\tau_i - (k + 3)$, где τ_i — число точек p на L_i с $r_p \geq 2$. Это следует из уравнения

$$\sum_{p \in L_i} (r_p - 1) = k - 1.$$

В качестве следствия формулы (4) имеем:

Если для всех прямых $3\tau_i = k + 3$ и все веса n_i совпадают ($n_i = n$ для $1 \leq i \leq k$), то

$$(5) \quad (3c_2(Y) - c_1^2(Y))/d = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^s p_j(x, y)^2,$$

где $x_i = 1 - \frac{1}{n}$, $y_j = -1 - \frac{1}{m_j}$.

3. Из конфигураций, удовлетворяющих условию: $3\tau_i = k + 3$ для всех прямых L_i , мне известны лишь нижеперечисленные. Исключая треугольник с $k = 3, t_2 = 3$, все они связаны с унитарными группами, порожденными отражениями, действующими в $\mathbb{C}^3$ (см. [3]).

а) Полный четырехсторонник (рис. 1).

$k = 6, t_2 = 3, t_3 = 4$, остальные $t_r = 0$.

б) Конфигурация $A_3^0(m)$, $m \geq 3$.

$k = 3m, t_2 = 0, t_3 = m^2, t_m = 3$, остальные $t_r = 0$

(для $m = 3, t_2 = 0, t_3 = 12$).

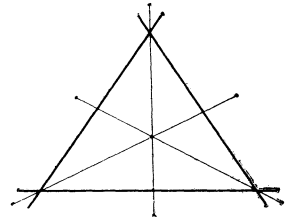


Рис. 1

В однородных координатах $3m$ прямых задаются уравнением

$$(z_0^m - z_1^m)(z_1^m - z_2^m)(z_2^m - z_0^m) = 0.$$

в) Конфигурация $A_3^3(m)$, $m \geq 2$.

$k = 3m + 3, t_2 = 3m, t_3 = m^2, t_{m+2} = 3$, остальные $t_r = 0$.

В однородных координатах $3m + 3$ прямых задаются уравнением

$$z_0 z_1 z_2 (z_0^m - z_1^m)(z_1^m - z_2^m)(z_2^m - z_0^m) = 0.$$

г) Конфигурация Гессе.

$k = 12, t_2 = 12, t = 9$, остальные $t_r = 0$.

Пучок Гессе всех кубик, проходящих через 9 точек перегиба гладкой кубики, содержит 4 вырожденные кубики (треугольники), образующие 12 прямых. Эти 12 прямых двойственны 12 тройным точкам $A_3^0(3)$.

д) Расширенная конфигурация Гессе (см. [3]).

$k = 21, t_2 = 36, t_4 = 9, t_5 = 12$, остальные $t_r = 0$.

Расширенная конфигурация Гессе содержит 12 прямых (обычной) конфигурации Гессе и 9 дополнительных прямых, образующих конфигурацию $A_3^0(3)$, так, что 12 тройных точек $A_3^0(3)$ совпадают с 12 двойными точками конфигурации Гессе.

е) Конфигурация икосаэдра (рис. 2).

$$k = 15, \quad t_2 = 15, \quad t_3 = 10, \quad t_5 = 6, \quad \text{остальные } t_r = 0.$$

ж) Конфигурация G_{168} . На комплексной проективной плоскости действует простая группа порядка 168. Эта группа содержит 21 инволюцию с 21 неподвижной прямой.

$$k = 21, \quad t_3 = 28, \quad t_4 = 21,$$

$$\text{остальные } t_r = 0.$$

з) Конфигурация A_6 . Знакопеременная группа A_6 (порядка 360) действует на комплексной проективной плоскости. Она содержит 45 инволюций с 45 неподвижными прямыми.

$$k = 45, \quad t_3 = 120, \quad t_4 = 45, \quad t_5 = 36,$$

$$\text{остальные } t_r = 0.$$

Является ли приведенный список конфигураций с $3\tau_i = k + 3$ для всех L_i полным?

4. Мы хотим изучать хорошие накрытия Y конфигураций с $3\tau_i = k + 3$ для

всех прямых и с одинаковыми весами n_i этих прямых, равными n . Будем искать среди них поверхности Y с $3c_2(Y) = c_1^2(Y)$. Тогда, согласно (5), все $p_j(x, y)$ должны равняться нулю, что означает, что

$$2 \left(-1 - \frac{1}{m_j} \right) + r \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 0,$$

где m_j — числа ветвления (веса) точек p_j с $r_{p_j} = r \geq 3$. Таким образом, нам следует найти все тройки n, r, m натуральных чисел таких, что $n \geq 2, r \geq 3, m \geq 1$, удовлетворяющих уравнению

$$(6) \quad \frac{2}{m} + \frac{r}{n} = r - 2.$$

Имеется ровно 11 возможностей:

(7)

n	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	9
r	5	6	8	4	6	3	4	3	5	3	3
m	4	2	1	3	1	8	2	5	1	4	3

Теперь мы можем перечислить хорошие накрытия Y для взвешенных конфигураций с постоянным весом n для всех прямых L_i , удовлетворяющих условию $3c_2(Y) = c_1^2(Y)$. Мы укажем все возможности для конфигураций, приведенных в п. 3, при которых (5) обращается в нуль. Во всех этих случаях Хёфер показал, что такие накрытия Y над S действительно существуют (при некотором d) и поверхность Y общего типа, имеющая поэтому своей универсальной накрывающей шар.

Для полного четырехсторонника можно положить $n = 4, 5, 6, 9$; при этом веса в каждой из 4 тройных точек равны 8, 5, 4, 3 соответственно.

Для остальных конфигураций будет указан только постоянный для всех прямых L_i вес n , так как веса m_j кратных точек p_j с $r_{p_j} \geq 3$ определяются из (6) и перечислены в (7).

Для конфигурации $A_3^0(3)$ можно взять $n = 4, 5, 6, 9$, для $A_3^0(4) — n = 4$, для $A_3^0(5)$ допустим постоянный вес $n = 5$. Это — полный список возможностей среди $A_3^0(m)$.

Для $A_3^3(2)$ можно выбрать $n = 4$, для $A_3^3(3) — n = 5$. Других решений среди $A_3^3(m)$ нет.

Для конфигурации Гессе возможны $n = 3$ и $n = 4$, для конфигурации икосаэдра имеется решение $n = 5$, для $G_{168} — n = 4$. Для расширенной конфигурации Гессе и A_6 -конфигурации выбор постоянного веса, удовлетворяющего нашим требованиям, невозможен.

5. Хёфер связал с каждой конфигурацией квадратичную форму в $\mathbb{R}^k$ от $\mathbb{R}^{k+s}$ переменных $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s$ (см. (4)), которую он обозначает $\text{Прор}(x, y)$, поскольку ею измеряется отклонение от «пропорциональности» $3c_2 = c_1^2$. Итак, по определению

$$(8) \quad \text{Прор}(x, y) = \frac{1}{4} (x^t A x + \sum_{j=1}^s p_j(x, y)^2).$$

Формула Хёфера и неравенство Мияоки — Яо позволяют предположить, что рассматриваемая форма положительно полуопределена. Это, вообще говоря, не так, однако в некоторых случаях положительная полуопределенность может быть установлена. Матрицу A можно записать в виде

$$A = 3B - U,$$

где U — матрица, все коэффициенты которой равны 1, а B — такова, что $B_{ii} = \sigma_i - 1$, $B_{ij} = 1$, если $i \neq j$ и $p \in L_i \cap L_j$ — двойная точка ($r = 2$). Остальные $B_{ij} = 0$. Если для всех прямых $3\tau_i = k + 3$ вектор $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$ удовлетворяет $Ae = 0$ и для каждого вектора x , ортогонального e (в стандартной метрике $\mathbb{R}^k$),

$$Ax = 3Bx.$$

Поэтому $\text{Прор}(x, y)$ положительно полуопределена, если такова B . Для всех конфигураций, перечисленных в п. 3, матрица B положительно полуопределена, а в случаях б), г), е), ж), з) положительно определена, так что при этом $\text{Прор}(x, y)$ (форма от $k + s$ переменных) положительно полуопределена и имеет нулевое собственное значение кратности 1. Следовательно, в этих случаях хорошие накрытия Y с $3c_2(Y) = c_1^2(Y)$ должны отвечать одинаковым для всех прямых конфигурации весам.

6. Запишем квадратичную форму $\text{Прор}(x, y)$ (см. (8)) в виде

$$(9) \quad \text{Прор}(x, y) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{Прор}(x, y) + \sum_{j=1}^s y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \text{Прор}(x, y) \right),$$

где (см. (4))

$$\frac{\partial}{\partial y_\beta} \text{Прор}(x, y) = P_\beta(x, y), \quad 1 \leq \beta \leq s.$$

Положим

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} P(x, y) = Q_\alpha(x, y), \quad 1 \leq \alpha \leq k,$$

$k + s$ однородных линейных уравнений на $k + s$ вещественных переменных $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s$:

$$Q_\alpha(x, y) = 0, \quad P_\beta(x, y) = 0,$$

или, что эквивалентно,

$$(10) \quad Ax = 0, \quad P_\beta(x, y) = 0 \quad (1 \leq \beta \leq s),$$

определяют нульподпространство $\text{Pгор}(x, y)$ размерности, равной корангу A . Если выполнено (10), то $\text{Pгор}(x, y) = 0$. Обратное справедливо, если $\text{Pгор}(x, y)$ положительно полуопределена. Следовательно, для всех конфигураций п. 3 алгебраическая поверхность Y (хорошее накрытие S степени d относительно $L_1, \dots, L_k, E_1, \dots, E_s$ и заданных чисел ветвления $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_s$) удовлетворяет $3c_2(Y) = c_1^2(Y)$ тогда и только тогда, когда выполнено (10) для

$$(11) \quad x_i = 1 - 1/n_i, \quad y_j = -1 - 1/m_j, \quad n_i \geq 2, \quad m_j \geq 1.$$

Для полного четырехсторонника коранг A равен 4. Существует конечное число решений (10), (11). Они отвечают теории гипергеометрического дифференциального уравнения [1]. Мы вернемся к этому позже.

Для расширенной конфигурации Гессе (см. п. 3д) коранг A равен 2. Далее, веса должны быть постоянны на множестве прямых конфигурации Гессе и на множестве 9 дополнительных прямых. Хёфер показал, что имеется ровно 3 решения (10), (11). При этом веса n_i суть следующие:

прямые Гессе	дополнительные прямые
3	9
4	2
4	6

Веса m_j определяются из уравнения $P_j(x, y) = 0$. Хёфер также доказал, что соответствующие накрытия существуют.

7. Шар $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$ вложен в $P_2(\mathbb{C})$. Автоморфизмы шара есть в точности проективные автоморфизмы $P_2(\mathbb{C})$, переводящие его в себя. На шаре имеется инвариантная комплексная гиперболическая метрика. Вполне геодезические кривые (вполне геодезические двумерные поверхности в четырехмерном римановом многообразии) суть пересечения прямых $P_2(\mathbb{C})$ с шаром.

Пусть Y — алгебраическая поверхность, универсальная накрывающая которой есть шар. Тогда Y наследует комплексную гиперболическую метрику шара. С точностью до постоянного множителя это — единственная метрика Келера — Эйнштейна на Y . Каждый автоморфизм Y является изометрией. Вполне геодезические кривые на Y — это те, подъем которых на шар есть прямая. Если все точки кривой неподвижны относительно нетривиального автоморфизма Y , такая кривая вполне геодезична. Поэтому, если к тому же Y является хорошим накрытием S , как в п. 1, все кривые $\pi^{-1}(C_i)$ (они гладкие, хотя не обязательно связные) — вполне геодезические, если соответствующее число ветвления больше 1.

Если гладкая кривая C на Y — вполне геодезическая,

$$e(C) = 2C \cdot C,$$

где $e(C)$ — эйлерова характеристика C , а $C \cdot C$ — индекс самопересечения. Это следует из относительного варианта «принципа пропорциональности» [3], поскольку верно на $P_2(\mathbb{C})$, где вполне геодезические кривые суть прямые ($e(L) = 2$, $L \cdot L = 1$).

Еноки доказал¹⁾, что для каждой гладкой кривой на Y (в предположении, что универсальная накрывающая Y — шар)

$$(12) \quad e(C) \leq 2C \cdot C$$

¹⁾ Е н о к и I. A proof of the proportionality principle for submanifolds (частное сообщение).

и C — вполне геодезическая тогда и только тогда, когда в (12) достигается равенство.

Для гладкой кривой C на алгебраической поверхности определим меру отклонения от пропорциональности

$$(13) \quad \text{rpor}(C) = 2C \cdot C - e(C).$$

Если универсальная накрывающая Y — шар, то, в силу наблюдения Еноки, $\text{rpor}(C) \geq 0$.

8. Рассмотрим опять взвешенную конфигурацию прямых на плоскости (как в п. 2), и пусть Y — хорошее накрытие S относительно $L_1, \dots, L_k, E_1, \dots, E_s$ и чисел ветвления $n_1, \dots, n_k$ ($n_i \geq 2$) и $m_1, \dots, m_s$ ($m_j \geq 1$). Пусть d — степень $\pi: Y \rightarrow S$. Тогда $\pi^{-1}(L_i)$ и $\pi^{-1}(E_j)$ — гладкие кривые на Y (вообще говоря, несвязные). Как показал Хёфер, частные производные $\text{Rpor}(x, y)$, рассмотренные в п. 6, имеют следующий геометрический смысл:

$$(14) \quad Q_\alpha(x, y) = \frac{n_\alpha}{d} \text{rpor}(\pi^{-1}L_\alpha), \quad P_\beta(x, y) = \frac{m_\beta}{d} \text{rpor}(\pi^{-1}E_\beta),$$

если $x_\alpha = 1 - 1/n_\alpha$, $y_\beta = -1 - 1/m_\beta$.

Ввиду (9) имеем

$$(15) \quad 3c_2(Y) - c_1^2(Y) = \frac{1}{2} \left(\sum (n_i - 1) \text{rpor}(\pi^{-1}L_i) - \sum (m_j + 1) \text{rpor}(\pi^{-1}E_j) \right).$$

На самом деле последняя формула достаточно банальна и может быть получена непосредственно, однако интерпретация rpor поднятия дивизора ветвления как частных производных квадратичной формы весьма полезна.

Если Y имеет своей универсальной накрывающей шар (эквивалентно: Y общего типа и $3c_2(Y) = c_1^2(Y)$), то $\text{rpor}(\pi^{-1}L_i) = 0$ и $\text{rpor}(\pi^{-1}E_j) \geq 0$ (см. п. 7).

Поэтому из (15) следует, что $\text{rpor}(\pi^{-1}E_j)$ — также нулевые. Мы получили результат, который не следует формально из рассмотрений п. 6, так как в общем случае нам неизвестна положительная полуопределенность $\text{Rpor}(x, y)$.

Пусть Y — такая, как в начале этого пункта. Предположим, что Y общего типа. Универсальная накрывающая Y — шар тогда и только тогда, когда $\text{rpor}(\pi^{-1}L_i) = \text{rpor}(\pi^{-1}E_j) = 0$.

9. В качестве примера вычислим $\text{rpor}(\pi^{-1}E_j)$. Кривая E_j на S получается раздутием точки p_j на плоскости. Положим $r_{p_j} = r$, и пусть $L_1, \dots, L_r$ — прямые, проходящие через p_j и имеющие веса $n_1, \dots, n_r$.

Положим $E_j = E$, $m_j = m$. Тогда

$$E \cdot E = -1 \quad \text{и} \quad \pi^{-1}(E) \cdot \pi^{-1}(E) = -\frac{d}{m^2}.$$

Для эйлеровой характеристики имеем

$$e(\pi^{-1}E) = \frac{d}{m} (2 - r) + \sum_{i=1}^r \frac{d/m}{n_i}.$$

Поэтому

$$\text{rpor}(\pi^{-1}E) = \frac{d}{m} \left(-\frac{2}{m} - \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_i} + r - 2 \right) = \frac{d}{m} \left(2y + \sum_{i=1}^r x_i \right),$$

если $x_i = 1 - \frac{1}{n_i}$, а $y = -1 - \frac{1}{m}$. Этим доказано (14) (см. определение линейных форм $P_j(x, y)$ в п. 2). Следовательно, $\text{rpor}(\pi^{-1}E) = 0$ тогда

и только тогда, когда

$$(15) \quad \frac{2}{m} + \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_i} = r - 2.$$

Хёфер приводит полный список наборов $(m; n_1, \dots, n_r)$ с $m \geq 1$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 2$, удовлетворяющих (15). Пусть N_r — число решений для заданного r .

Имеем

r	3	4	5	6	7	8
N_r	87	27	150	18	3	1

Сюда входят 11 случаев с совпадающими n_i (см. (7)).

10. Рассмотрим полный четырехсторонник из п. 3а). Для получения S необходимо раздуть 4 тройные точки. Поверхность S есть поверхность дель Пеццо с 10 исключительными кривыми $L_1, \dots, L_6, E_1, \dots, E_{10}$. Конфигурация этих кривых весьма симметрична, так что в этом специальном случае кривые L_i и E_j равноправны. Занумеруем 10 прямых конфигурации 10 двухэлементными подмножествами $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, так что две кривые пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие подмножества не пересекаются. Будем обозначать наши кривые $E_{i,j}$ ($i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$). Ясно, что рассматриваемая конфигурация 10 кривых допускает группу симметрии S_5 . Выберем в качестве E_1, E_2, E_3, E_4 кривые $E_{01}, E_{02}, E_{03}, E_{04}$. Веса n_i, m_j теперь обозначаются n_{ij} , в частности $n_{0j} = m_j$.

Имеем

$$\text{rgr}(\pi^{-1}E_{01}) = \frac{d}{n_{01}} \left(-\frac{2}{n_{01}} - \frac{1}{n_{23}} - \frac{1}{n_{24}} - \frac{1}{n_{34}} + 1 \right).$$

Следовательно, для нахождения поверхностей Y , накрываемых шаром, нужно найти веса n_{ij} , удовлетворяющие

$$(16) \quad \frac{2}{n_{01}} + \frac{1}{n_{23}} + \frac{1}{n_{24}} + \frac{1}{n_{34}} = 1$$

и всем уравнениям, получаемым из (16) перестановкой индексов. При этом $n_{ij} \geq 2$. С точностью до перестановки имеется 7 решений: 4 указанных в п. 4 и 3 дополнительных. Таблица в [1] включает 27 случаев из-за того, что допускаются разветвленные накрытия плоскости, связанные с факторами шара по группе Γ , которая действует несвободно или же некокомпактна и имеет параболические точки. Теория Хёфера включает эти случаи для полного четырехсторонника и других конфигураций. При этом используется уточнение теоремы Яо, данное Мияока [10] и Р. Кобаяси [7].

Если в случае полного четырехсторонника

$$\frac{1}{n_{ij}} = 1 - \mu_i - \mu_j \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^4 \mu_i = 2,$$

то выполняется (16) и все уравнения, получающиеся из него перестановкой индексов. Это — обозначение [1]. Аффинное пространство $\sum \mu_i = 2$ соответствует нашему четырехмерному нульподпространству формы $\text{rgr}(x, y)$.

11. Разветвленные накрытия плоскости, связанные с полным четырехсторонником, соответствуют теории гипергеометрического дифференциального уравнения, восходящей к Э. Пикару (см. [1]). Возникает вопрос, существуют ли аналитические дифференциальные уравнения, монодромия которых дает наши накрытия, связанные с другими конфигурациями. Этот

трудный вопрос успешно изучался Масаки Йошидой в двух работах [12], [13].

Работа Хольцапфеля о модулярных поверхностях Пикара (см., например, [5] и содержащиеся там ссылки на литературу) тесно связана с обсуждавшимися в этой заметке вопросами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Deligne P., Mostow G. D. Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy.— Preprint, IHES/M/82/46, July 1983.
- [2] Hirzebruch F. Automorphe Formen und der Satz von Riemann — Roch.— Symp. Intern. Top. Alg., 1956, p. 129—144; Universidad de Mexico, 1958.
- [3] Hirzebruch F. Arrangement of lines and algebraic surfaces.— Progress in Math., Boston: Birkhäuser, 1983, v. 36, p. 113—140.
- [4] Hofer Th. Ballquotienten als verzweigte Überlagerungen algebraischer Flächen.— Dissertation, Bonn (in preparation).
- [5] Holzapfel R.-P. Arithmetic curves on ball quotient surfaces.— Ann. Glob. Analysis and Geometry, 1983, v. 1, № 2, p. 21—90.
- [6] Kato Mi. On the existence of finite principal uniformisations of CP^2 along weighted line configurations.— Mem. Fac. Sc. Kyushu University, Ser. A, Math., 1984, v. 38, p. 127—131.
- [7] Kobayashi R. Einstein — Kaehler V -metrics on open algebraic surfaces, Abstract.— Preprint, Tohoku University, 1984.
- [8] Miyaoka Y. On the Chern numbers of surfaces of general type.— Inv. Math., 1977, v. 42, p. 225—237.
- [9] Miyaoka Y. On algebraic surfaces with positive index.— Progress in Mathematics, Boston: Birkhauser, 1983, v. 39, p. 281—301.
- [10] Miyaoka Y. The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants.— Math. Ann., 1984, v. 268, p. 15—171.
- [11] Yau S.-T. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1977, v. 74, p. 1798—1799.
- [12] Yoshida Ma. Orbifold-uniformizing differential equations.— Math. Ann., 1984 v. 267, p. 125—142.
- [13] Yoshida Ma. Orbifold-uniformizing differential equations II.— Preprint, 1984

