Mathematik, Studium und Forschung

Friedrich Hirzebruch

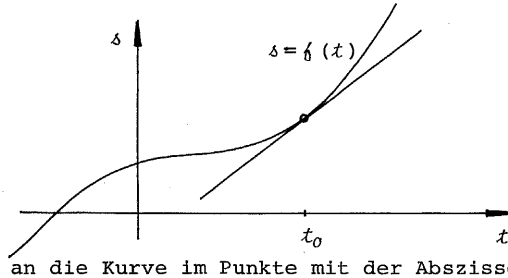
Der Mathematikstudent hört zu Beginn seines Studiums eine Vorlesung über Differential- und Integralrechnung. (Ich verwende hier eine alte Terminologie; es dürfte jedem klar sein, daß der Professor nicht vorliest und der Student nicht nur hört. Hier halte ich keine Vorlesung, sondern einen Vortrag und deshalb lese ich ab.)

Diese Vorlesung sollte für den Studenten ein aufregendes Erlebnis sein, Einblicke in die Entwicklung der Mathematik seit Pythagoras und Euklid bis zu heutigen Forschungen vermitteln, ihre Rolle in der Geistesgeschichte und ihre Bedeutung für uns heute herausstellen. Manchmal gelingt dies, manchmal ist der Übergang von der Schule zur Universität, in diese Vorlesung über Differential- und Integralrechnung, ein Schock, der sich nur schwer überwinden läßt. Aller Erfahrung nach sind das Erlebnis der Differential- und Integralrechnung in den ersten beiden Semestern und seine geistige Verarbeitung ausschlaggebend für die mathematische Zukunft des Studenten.

Am Anfang einer solchen Vorlesung und zu Beginn eines Vortrags wie heute müßte man eigentlich die Frage beantworten "Was ist Mathematik?" Das bekannte Buch 'Was ist Mathematik?' von Richard Courant, das sich bemüht, Wurzeln, Motive und Ziele der Mathematik unverschleiert durch die kanonische Darstellungsform 'Voraussetzung, Satz, Beweis' darzustellen, beantwortet die Frage, indem es in die Substanz der Mathematik einführt. Courant sagt an anderer Stelle, man könne auch die Fragen "Was ist Musik?" oder

"Was ist Malerei?" nicht beantworten, ohne Erfahrung mit Rhythmus, Harmonie und Struktur bzw. mit Form, Farbe und Komposition vorauszusetzen, im Falle der Mathematik sei Kontakt mit ihrer Substanz sogar noch notwendiger, um die Frage beantworten zu können. Heute soll etwas zum Studium der Mathematik gesagt werden, wobei wir die Vorlesung über Differential- und Integralrechnung wegen ihrer fundamentalen Bedeutung heranziehen. Dadurch werden wir uns der Beantwortung der Frage "Was ist Mathematik?" vielleicht etwas nähern. Es wird sich aber nicht vermeiden lassen, daß dabei ganz konkrete Begriffe und Sätze vorkommen, also 'Kontakt mit mathematischer Substanz'.

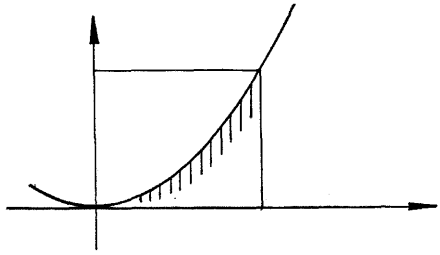
Grundaufgabe der Differentialrechnung : Man berechne zu einer gegebenen Funktion $s = f(t)$ die Ableitung $f'(t)$. Stellt man die Funktion graphisch dar, dann ist $f'(t_0)$ die Steigung der



Tangente an die Kurve im Punkte mit der Abszisse t_0. Viele derartige Tangentenaufgaben wurden bereits von den Griechen, insbesondere von Archimedes gelöst. Faßt man $s = f(t)$ als die Länge des Weges auf, den ein Körper von der Ausgangslage in t Sekunden zurückgelegt hat, dann ist $f'(t)$ die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t. Bereits in den Arbeiten von Galilei (1564 - 1642) über den freien Fall steht zwischen den Zeilen, daß Geschwindigkeit dasselbe wie Ableitung ist.

Als Grundaufgabe der Integralrechnung kann man die Flächenberechnung ansehen. Beispiel: Nach Archimedes ist der

Flächeninhalt unter dem Parabelbogen gleich einem Drittel des Flächeninhalts des zugehörigen Rechtecks:



Erst 1900 Jahre nach Archimedes erkennt Barrow (1667) als Vorläufer von Newton und Leibniz, daß Differentiation und Integration Umkehrungen voneinander sind. Der Satz von Archimedes über die Parabel wird dadurch fast trivial. Newton und Leibniz sind die wirklichen Schöpfer der Differential- und Integralrechnung als schlagkräftiger mathematischer Apparat, mit dem heute Schüler und Studenten mit Leichtigkeit Aufgaben lösen, die früher vielleicht große Einzelentdeckungen darstellten. Für Newton - Mathematiker und Physiker in einer Person - ist die Differential- und Integralrechnung das entscheidende Hilfsmittel, um aus Keplers Planetengesetzen das Gravitationsgesetz und die Gleichungen der Mechanik zu abstrahieren. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Geschwindigkeit ändert, also die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion oder die zweite Ableitung des zurückgelegten Weges ist die Beschleunigung. Vom Weg kommt man also durch zwei Differentiationen zur Beschleunigung, umgekehrt kommt man durch zwei Integrationen von der Beschleunigung zum Weg. Die Beschleunigung kann man im Innern eines Flugzeuges messen, von diesen Messdaten aus erhält man durch elektronische Integratoren und Rechner die gewünschte Weginformation. Das ist das Prinzip der Trägheitsnavigation, und deshalb sieht man am Anfang des Lehrpakets über Integralrechnung des ZDF und des Deutschen Instituts für Fernstudien den Start eines Düsenflugzeugs.

Was ich bisher gesagt habe, sollte einem gut ausgebildeten

Gymnasiasten vertraut sein und zeigt noch nicht, warum diese Vorlesung Schwierigkeiten oder gar einen Schock verursacht. Ich nenne zwei Gründe.

1. *Der axiomatisch - deduktive Aufbau, zusammen mit der praezisierten mathematischen Sprache.*

2. *Der grosse Abstraktionsgrad.*

Der axiomatisch-deduktive Aufbau und die Einführung abstrakter Begriffsbildungen, durch die eine mathematische Theorie in einem großen Bereich gültig und anwendbar gemacht werden soll, sind (nicht genau gegeneinander abgrenzbare) Methoden, die manche der großen Erfolge mathematischer Forschung, darunter die Lösung konkreter klassischer und lange ungelöst gebliebener Probleme, während der letzten Jahrzehnte ermöglicht haben. Beide Methoden sind bereits in der Anfängervorlesung unentbehrlich, darüber möchte ich sprechen. Beide bringen aber auch Gefahren mit sich, die nicht unerwähnt bleiben dürfen.

Der axiomatisch-deduktive Aufbau und die praezisierte mathematische Sprache. Während der stürmischen Zeit der Erfindung und Entwicklung der Differential- und Integralrechnung haben sich die Forscher über eine exakte Grundlegung nur wenig Sorgen gemacht. Das wurde im 19.Jahrhundert nachgeholt. Die Vorlesung folgt natürlich nicht der historischen Reihenfolge. Die exakte Grundlegung des Zahlensystems wird an den Anfang gesetzt. Hierfür darf der Dozent nicht viel Zeit einplanen, denn für die Physikvorlesung muß die eigentliche Differential- und Integralrechnung zusammen mit den Eigenschaften der elementaren Funktionen und den zugehörigen einfachen Differentialgleichungen (Schwingungsgleichung) möglichst schnell bereitgestellt werden. Deshalb ist nicht zu empfehlen, den konstruktiven Aufbau des Zahlensystems, ausgehend von den natürlichen Zahlen (1,2,3,...), die nach Kronecker der liebe Gott gemacht hat, über die ganzen Zah-

len und die rationalen Zahlen (Brüche) zu den reellen Zahlen durchzuführen. Der Dozent beginnt meistens mit einem Axiomensystem für die reellen Zahlen. Geometrisch entsprechen die reellen Zahlen eineindeutig den Punkten einer Geraden. Wir können uns auch denken, daß die reellen Zahlen das Zeitkontinuum von minus Unendlich bis plus Unendlich darstellen. Deshalb hat vielleicht Kronecker Unrecht, und die reellen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, während die natürlichen Zahlen Menschenwerk sind. Es ist uns also irgendwie klar, was die reellen Zahlen 'bedeuten' sollen. Bei einer exakten Grundlegung dürfen wir uns aber weder auf eine geometrische Theorie, die selbst fundiert werden müßte, noch auf das physikalische Zeitkontinuum berufen. Die Theorie der reellen Zahlen wird axiomatisch begründet, es wird nicht gesagt, was reelle Zahlen und ihre Rechenoperationen wirklich sind. Worauf es ankommt, sind die Beziehungen der reellen Zahlen untereinander, die Rechenoperationen und deren Regeln. Dies wird axiomatisch beschrieben. Die Sätze der Theorie sind logische Folgerungen aus den Axiomen. Zu den Axiomen gehören die Grundregeln des Rechnens, wie zum Beispiel das distributive Gesetz

$$a(b+c) = ab + ac \ ,$$

Axiome über die Relation

'*a kleiner als b*' .

(Man könnte auch '*a früher als b*' sagen.)

Auch die Existenz der Zahl 1 wird axiomatisch gefordert. Ausgehend von der Zahl 1 gelangt man durch die Rechenoperationen zu den Brüchen, z.B. $\frac{3}{2} = \frac{1+1+1}{1+1}$. Die Existenz der rationalen Zahlen folgt also aus den Axiomen. Ein weiteres Axiom, *das Vollständigkeitsaxiom* , sichert die anschaulich angestrebte eineindeutige Zuordnung zwischen den reellen Zahlen und den Punkten einer Geraden.
Die Länge der Diagonale eines Quadrats ist nach dem Satz von Pythagoras eine Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Wie schon die alten Griechen wußten, gibt es keinen Bruch, dessen Quadrat gleich 2 ist. Das Quadrat von $\frac{17}{12}$ ist gleich $2 + \frac{1}{144}$, also ungefähr gleich 2, aber doch ver-

schieden von 2. Das Quadrat von $\frac{41}{29}$ ist gleich $2 - \frac{1}{841}$, kommt näher an 2 heran. Diagonale und Seite eines Quadrats verhalten sich ungefähr wie 41 zu 29, aber eben doch nicht genau.

Das Vollständigkeitsaxiom impliziert zum Beispiel die Existenz einer reellen Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.

Die axiomatisch-deduktive Methode dient also dazu, die Theorie der reellen Zahlen und damit die Differential- und Integralrechnung zu fundieren. An diesem Beispiel wird dem Studenten einsichtig, wie in der Mathematik ganz generell Grundlegung und Aufbau einer Disziplin erfolgen. Neben diesem wissenschaftstheoretischen Grund für die Verwendung der axiomatisch-deduktiven Methode in der Anfängervorlesung tritt ein anderer Grund, der mehr pädagogisch-methodischer Natur ist. Eine systematisch-deduktive Darstellung einer Theorie wird besser 'verstanden', geordneter überblickt und vermittelt eine günstige Speicherung der Sätze der Theorie für den Anwendungsfall. Materialvorlesungen, für die man auswendig lernen muß, gibt es in der Mathematik nicht.

In der Schule ist eine konsequente axiomatisch-deduktive Darstellung der Mathematik im allgemeinen nicht möglich und wohl auch nicht immer didaktisch zweckmäßig. Deshalb ist in der Universität eine längere Eingewöhnungszeit erforderlich. Hinzu kommt, daß die Darstellung in einer präzisierten Sprache, nämlich der mengentheoretischen und formal-logischen, erfolgt. Diese ist heute durch den Schulunterricht zwar bereits vielen bekannt, trotzdem ist ihre sichere Beherrschung mit eines der nicht leichten Lernziele der ersten Vorlesungen. Hierdurch erklären sich manche Schwierigkeiten, darüber hinaus ergeben sich Gefahren, von denen ich jetzt sprechen will.

Der Student ist oft begeistert von den Erfolgen der konsequent eingesetzten axiomatisch-deduktiven Methode und der

Präzision der mathematischen Sprache. Aber leider drängt sich dies dem Studienanfänger häufig so stark ins Bewußtsein, daß mathematische Probleme und Inhalte oft als sekundär erlebt werden und eine Identifizierung der Mathematik mit Axiomatik und mengentheoretischer Sprache erfolgt. Dieses Mißverständnis wird paradoxerweise begünstigt durch die - an sich verdienstvollen - Bemühungen vieler Mathematikpädagogen, der mathematischen Wissenschaft im öffentlichen Bewußtsein einen angemesseneren Platz zu verschaffen, als sie ihn heute noch entsprechend alter,deutscher Tradition besitzt. Bei diesen Bemühungen wird nämlich zu ausschließlich die vielseitige Verwendbarkeit der axiomatisch-deduktiven Methode (auch bei der Mathematisierung anderer Wissenschaften) oder die mengentheoretische Sprache herausgekehrt. Sie kennen alle das Schlagwort von der 'Neuen Mathematik' oder die Diskussion über Mengenlehre-Unterricht in den Schulen oder gar Kindergärten.

Als mathematische Disziplin ist die Mengenlehre 1oo Jahre alt, also keineswegs neu. 1878 stellte Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, seine berühmte Kontinuumshypothese auf. Die damit zusammenhängenden Probleme sind übrigens gerade in den letzten Jahren erneut Gegenstand aufregender und erfolgreicher Forschung mathematischer Logiker gewesen.

Aber darum handelt es sich im Kindergarten, in der Schule und auch in den ersten Semestern natürlich nicht. Hier wird nur die sogenannte naive Mengenlehre als präzisierte mathematische Sprache eingeführt, die zur Formulierung mathematischer Theoreme hervorragend geeignet ist, und ich wüßte nicht, wie ich eine mathematische Vorlesung halten sollte, ohne ganz selbstverständlich von Mengen zu reden. Aber die mengentheoretische Sprache darf nicht Selbstzweck sein und nicht mit Mathematik verwechselt werden. Das transitive Gesetz der Inklusion zum Beispiel ist keine tiefsinnige Mathematik. Schon der Fuchs weiß folgendes: Wenn die Hühner im Stall sind und der Stall im Garten ist, dann sind die Hühner im Garten.

Die Mengenlehre ermöglicht vielleicht eine sinnvolle Reform des Kindergarten- und Schulunterrichts, die den Kindern viel Freude bereitet, das logische Denken schult und die Einführung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen endlicher Mengen nahelegt. Aber die Kinder sollten nicht nur lernen, warum $3 \cdot 4$ gleich $4 \cdot 3$ ist, sondern auch wissen, daß $3 \cdot 4 = 12$ ist. Ferner ist es unsinnig, die mengentheoretische Sprache einzuführen und sie dann nicht konsequent im Mathematikunterricht aller Stufen zu verwenden, wie es als Kinderkrankheit der Reform wohl noch oft vorkommt.

Die mengentheoretische Sprache ermöglicht sicherlich nicht eine *voellige* Erneuerung des mathematischen Unterrichts, die es dem durchschnittlichen Schüler und Studenten nun grundsätzlich leichter machen würde, Mathematik zu begreifen. Das ist eine Illusion. Ich verweise hierzu auf den Artikel des französischen Mathematikers René Thom : 'Modern' Mathematics: An Educational and Philosophic Error? , American Scientist 1971.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch meine Überzeugung zum Ausdruck bringen, daß Mathematik, wie Musik, eine angeborene, milieuunabhängige Begabung erfordert, bei deren Fehlen eine gute Didaktik und die mengentheoretische Sprache zwar bessere Erfolge erzielen können als eine schlechte Didaktik und eine unpräzise Sprache, aber eben doch nur mäßige Erfolge.

Meine kritische Einstellung zur sogenannten 'Neuen Mathematik' wird, so möchte ich behaupten, von der Mehrzahl der forschenden Mathematiker geteilt. Die übermäßige Betonung der mengentheoretischen Sprache und der axiomatisch-deduktiven Methode sind Gefahren für die Zukunft der letztlich entscheidenden problemorientierten mathematischen Forschung. Richard Courant hat dies hinsichtlich der axiomatisch-deduktiven Methode vor längerer Zeit mustergültig formuliert und die konstruktive Erfindung und die schöpferische Intuition, ohne die mathematische Probleme nicht gelöst

werden können, herausgestellt.

Ich zitiere:

"Die Betonung des deduktiv-axiomatischen Charakters der Mathematik birgt große Gefahr. Allerdings entzieht sich das Element der konstruktiven Erfindung, der schöpferischen Intuition einer einfachen philosophischen Formulierung; dennoch bleibt es der Kern jeder mathematischen Leistung, selbst auf den abstraktesten Gebieten. Wenn die kristallisierte, deduktive Form das letzte Ziel ist, so sind Intuition und Konstruktion die treibenden Kräfte. Der Lebensnerv der mathematischen Wissenschaft ist bedroht durch die Behauptung, Mathematik sei nichts anderes als ein System von Schlüssen aus Definitionen und Annahmen, die zwar in sich widerspruchsfrei sein müssen, sonst aber von der Willkür des Mathematikers geschaffen werden. Wäre das wahr, dann würde die Mathematik keinen intelligenten Menschen anziehen. Sie wäre eine Spielerei mit Definitionen, Regeln und Syllogismen ohne Ziel und Sinn. Die Vorstellung, daß der Verstand sinnvolle Systeme von Postulaten frei erschaffen könnte, ist eine trügerische Halbwahrheit. Nur aus der Verantwortung gegen das organische Ganze, nur aus innerer Notwendigkeit heraus kann der freie Geist Ergebnisse von wissenschaftlichem Wert hervorbringen.

Trotz der Gefahr der einseitigen Übertreibung hat die Axiomatik zu einem tieferen Verständnis der mathematischen Tatsachen und ihrer Zusammenhänge und zu einer klareren Einsicht in das Wesen mathematischer Begriffe geführt. Hieraus hat sich eine Auffassung entwickelt, welche über die Mathematik hinaus für moderne Wissenschaft typisch ist."

Einen Gedanken aus dem vorhin erwähnten Artikel von Thom möchte ich noch anführen, der sicher der Überzeugung vieler Mathematiker nahekommt, und unsere angehenden Mathematiker warnen sollte, Formalismus, Axiomatik, Sprache mit Mathematik zu verwechseln.

Ich übersetze:
"Wenn Mathematik nur ein beliebiges Spiel ist, Zufallsprodukt zerebraler Aktivität, wie kann man dann ihren unzweifelhaften Erfolg bei der Beschreibung des Universums erklären? Mathematik findet man nicht nur in der geheimnisvollen unveränderlichen Ordnung der physikalischen Gesetze, sondern auch in einer, wenn auch mehr versteckten, jedoch ebenso sicheren Weise in der unendlichen Folge belebter und unbelebter Formen und in der Bildung und Veränderung ihrer Symmetrien."

Im Anschluß an diesen letzten Satz muß ich auf die Forschungsarbeiten von Thom der letzten Zeit hinweisen. Sie zeigen einen Weg zum qualitativen geometrischen Verständnis makroskopischer Phänomene. Sie enthalten faszinierende Ideen mit Anwendungen auf die Morphogenese in der Biologie und auf andere Gebiete und liefern voraussichtlich Forschungsprobleme für kommende Generationen von Mathematikern. Zur Zeit denkt Thom, so habe ich gehört, darüber nach, ob der in der Natur vorkommende Übergang von bilateraler zur pentagonalen Symmetrie, zum Beispiel bei der Entwicklung des Seeigels, mittels geometrischer Zwänge erklärt werden kann.

Ich hatte zwei Gründe für mögliche Schwierigkeiten in der Anfangsphase eines Mathematikstudiums genannt, die axiomatisch-deduktive Methode und *den grossen Abstraktionsgrad.*

Im Interesse vielseitiger Anwendungen in anderen mathematischen Disziplinen wie der Wahrscheinlichkeitstheorie, in der Physik und den Naturwissenschaften allgemein müssen die Begriffe der Differential- und Integralrechnung schon bald in größerer Allgemeinheit behandelt werden. Der Student wird mit diesen abstrakten Theorien, denen aber doch stets eine mathematisch-anschauliche Bedeutung zugrundeliegt, die sich dem angehenden Mathematiker nach einiger Zeit eröffnet, im zweiten Semester der Vorlesung über

Differential- und Integralrechnung konfrontiert.

Differentialrechnung stellt sich dabei als das Studium von Funktionen heraus, die sich durch lineare Funktionen approximieren lassen mit dem Ziel, aus dem Verhalten der einfachen linearen Funktionen auf das Verhalten der komplizierteren differenzierbaren Funktionen zurückzuschließen. Bei dem klassischen Fall, den wir zu Anfang besprochen haben, wird die approximierende lineare Funktion graphisch durch die Tangente dargestellt. Bei dem allgemeineren Fall, der im fortgeschrittenen Teil der Vorlesung zu untersuchen ist, handelt es sich um Funktionen, die in einem Raum beliebiger Dimension definiert sind und deren Werte wieder in einem solchen Raum liegen oder aber auch reelle Zahlen sein können, denn die Menge der reellen Zahlen bildet ebenfalls einen Raum. Die Räume können sogar unendliche Dimension haben. Die Punkte des unendlich-dimensionalen Raumes könnten zum Beispiel die Kurven sein, die zwei feste Punkte der Ebene miteinander verbinden. Ordnet man jeder solchen Kurve ihre Länge zu, dann erhält man eine Funktion von dem unendlich-dimensionalen Raum der Kurven in die reellen Zahlen. Diese Funktion kann man differenzieren und darauf die Maxima- und Minima-Methoden anwenden, die Sie von der Schule kennen. Extremalpunkt ist in diesem Fall die kürzeste Verbindung der beiden Punkte, nämlich die Gerade. Dieses Beispiel ist eine einfache Aufgabe der Variationsrechnung, ein Gebiet, das für die theoretische Mechanik wichtig ist.

Bei dieser kurzen Erörterung sind bereits viele Begriffe vorgekommen, die alle präzisiert werden müssen: Approximation, Raum, Dimension, Kurve, Länge, Extremalpunkte. An das Abstraktionsvermögen werden auch dadurch erhebliche Anforderungen gestellt, daß komplizierte mathematische Objekte plötzlich im Sinne einer übergeordneten Betrachtungsweise als simple Punkte eines Raumes konzipiert werden.

Nun zur Integralrechnung: Integrale müssen bezüglich von Maßen definiert werden, wobei diese Maße in den Anwendungen etwa als Volumina, als Massen, als elektrische Ladung oder als Grundwahrscheinlichkeiten in Erscheinung treten. Grob gesprochen *berechnen Integrale* in dieser allgemeinen Auffassung *die Maße komplizierterer Mengen, wenn die Maße einfacherer Mengen bereits wohldefiniert sind.* Selbstverständlich handelt es sich hier um n-dimensionale Integrale, bei deren Berechnung der zu Anfang erwähnte Hauptsatz (Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung) nur mit Schwierigkeiten verwendet werden kann. Es gibt jedoch einen Integralsatz, der unter gewissen Voraussetzungen ein n-dimensionales Integral einem $(n-1)$-dimensionalen gleichsetzt. (Für $n=1$ handelt es sich um den klassischen Hauptsatz.) So ist etwa der Fluß eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Fläche F, die ein Gebiet G des 3-dimensionalen euklidischen Raumes berandet, ein 2-dimensionales Integral, welches gleich dem 3-dimensionalen Integral der Quelldichte des Vektorfeldes über G ist.

Unentbehrlich für die Elektrodynamik sind diese Integralsätze der Vektoranalysis, aber auch ein Einstiegspunkt in die komplexe Funktionentheorie, die algebraische Topologie und die Differentialtopologie, Beispiele für mathematische Disziplinen großer und erfolgreicher Forschungsaktivität in den mathematischen Zentren der Sowjetunion, der USA, Japans, Frankreichs, Großbritanniens und bei uns. Von dem erwähnten bescheidenen Einstiegspunkt aus, nur einer von vielen Einstiegspunkten übrigens, führt ein großartiger, viel Freude bereitender, aber nur mit Geduld, enormem Arbeitsaufwand und Leistungsbereitschaft zu bewältigender Weg zu den heutigen Grenzen des mathematischen Wissens, wobei man auf dem Wege seine Kräfte stets bei der Lösung konkreter mathematischer Probleme zu messen hat. Unsere jungen Mathematiker hier im Saal haben gezeigt, daß sie dazu in der Lage sein werden. Unabhängig von dem jeweiligen Studiengang sollten allen Mathematikstudenten an der Universität neben der allgemeinen Berufsausbildung auch

aktuelle Probleme der mathematischen Forschung gezeigt werden.

Nun zurück zu dem großen Abstraktionsgrad. Er birgt Gefahren. Es besteht nämlich häufig eine Tendenz, ohne innermathematische oder durch Bedürfnisse der Anwendungen gegebene Motivation, Verallgemeinerungen zu suchen, indem man irgendwelche Axiome oder Voraussetzungen willkürlich wegläßt, nach noch abstrakteren Begriffen sucht und sieht, was dabei herauskommt. Im Sinne des "publish or perish" (publiziere oder du bekommst keine Stelle) werden viele richtige, aber mathematisch uninteressante Arbeiten verfaßt, die zur Flut der mathematischen Publikationen nicht unwesentlich beitragen und es dem Mathematiker erschweren, in der riesigen Literatur die für seine Arbeiten wesentlichen Beiträge zu finden. Durch Extrapolation soll folgen, wie ich neulich gehört habe, daß im Jahre 2500 (?) die Länge der Bücherreihen in den Bibliotheken mit Überlichtgeschwindigkeit anwachsen wird.

Es gibt keine allgemeingültigen Kriterien, um festzustellen, welche Arbeiten mathematisch interessant oder gar tiefliegend sind, aber die Mathematiker der Welt werden sich meistens recht bald darüber einig, ob eine Arbeit wesentlich ist. Es gibt, wie gesagt, richtige,uninteressante Arbeiten. Es gibt auch falsche,interessante Arbeiten, die durch ihre Ideen der Forschung Impulse verleihen.

Forschung. Treibende Kraft sind die mathematischen Probleme. Die Lösung eines Problems oder die Arbeit an der Lösung erzeugen neue Probleme. Der große Mathematiker David Hilbert, der an der Universität Göttingen gelehrt hat, hielt auf dem internationalen Mathematikerkongreß zu Paris im Jahre 1900 seinen berühmt gewordenen Vortrag mit dem Titel 'Mathematische Probleme'.

Hilbert sagt: "Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für

den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Überfluß an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbständigen Entwicklung. Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so braucht die mathematische Forschung Probleme. Durch die Lösung von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers; er findet neue Methoden und Ausblicke, er gewinnt einen weiteren und freieren Horizont."

In seinem Vortrag stellte und diskutierte Hilbert 23 Probleme, die bis heute eine bedeutende Rolle in der mathematischen Forschung spielen. Ein sowjetischer Verlag hat im Jahre 1969 einen Band veröffentlicht, der in der DDR übersetzt wurde, in dem sowjetische Mathematiker für jedes einzelne der 23 Probleme, die seit 1900 gefundenen Lösungen oder Teillösungen, die noch ungelösten Fragen, die durch das Problem entwickelten Methoden, die erzeugten neuen Probleme und deren Lösungsansätze diskutieren.

Das fünfte Hilbertsche Problem wird heute oft so formuliert:

Können in einer lokal-euklidischen,topologischen Gruppe stets Koordinaten eingeführt werden, so daß bezüglich dieser Koordinaten die Gruppenoperationen durch differenzierbare Funktionen gegeben werden?

Diese Frage wurde 1952 durch die amerikanischen Mathematiker Gleason, Montgomery, Zippin in bejahendem Sinne beantwortet. Hilbert hatte das Problem eigentlich allgemeiner formuliert, nämlich für Transformationsgruppen, ein Gebiet, das in letzter Zeit wieder besonders forschungsaktiv geworden ist.

Beispiel :

Aus einem Satz von Michael Atiyah (Oxford) und mir folgt, wie man in dem Buch von Bredon über Transformationsgruppen

(New York 1972) nachlesen kann, daß es eine differenzierbare 12-dimensionale Mannigfaltigkeit gibt, auf der die Kreislinie (d.h. die Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrage 1) effektiv und stetig operiert, während es keine effektive, differenzierbare Aktion der Kreislinie bezüglich irgendeiner differenzierbaren Struktur der Mannigfaltigkeit gibt.
Die Hilbertsche Frage für Transformationsgruppen ist also mit 'Nein' zu beantworten. Auch das war schon seit 1952 bekannt. Durch unsere Methoden entstanden neue Beispiele dafür. Vielleicht haben nur wenige das verstanden, was ich zum 5.Hilbertschen Problem gesagt habe. Ich möchte nur, daß folgendes ersichtlich wird: Ein Problem wird von Hilbert als wichtig für die weitere Entwicklung erkannt und in die Liste seiner Probleme der Jahrhundertwende aufgenommen. Nach 5o Jahren wird der wichtigste Teil des Problems gelöst, auch nach 2o weiteren Jahren ist die Hilbertsche Fragestellung Gegenstand der Forschung, es gibt neue Probleme: Wie kann man die Gruppenaktionen, die nicht differenzierbar gemacht werden können, klassifizieren? Möglicherweise sind viele in gewissem Sinne stückweise differenzierbar. Forschungen in Richtung dieser neuen Probleme haben keine Anwendungen außerhalb der Mathematik, vielleicht werden sie nie angewandt werden. Das tut ihrer mathematischen Qualität keinen Abbruch. Es werde jedoch daran erinnert, daß es sich um Aktionen von Lieschen Gruppen handelt und die linearen Aktionen der Lieschen Gruppen entscheidendes Hilfsmittel für die Theorie der Elementarteilchen sind.

Mathematiker werden neuerdings häufig gefragt, ob ihre Forschungen 'gesellschaftlich relevant' seien. Einmal sagte mir ein Student, meine Arbeiten seien nicht gesellschaftlich relevant und machten mir sogar Freude, dafür könne ich doch kein Gehalt beanspruchen, ich dürfe diese Forschungen eigentlich nur während der Freizeit betreiben. Nun, Freude erhöht die Qualität des Lebens und des Arbeitsplatzes. Es wäre schön, wenn jeder Arbeitsplatz mit ein wenig Freude verbunden wäre. Bis vor einigen Jahren war das bei der

Arbeit des Mathematikers an der Universität in Lehre und Forschung in hohem Maße der Fall.
Niemand kann den Wert der Ergebnisse der Grundlagenforschung für später vorausschauen, sie braucht einen Freiraum ohne Nützlichkeitserwägungen. Bei meiner Ernennung zum ordentlichen Professor vor 16 Jahren wurde mir der Auftrag erteilt, das Fach Mathematik in Lehre und Forschung angemessen zu vertreten, und ich betrachte es nicht nur als mein Recht, sondern auch als meine Pflicht, diesen Auftrag solange auszuführen, wie die Arbeitsbedingungen an der Universität es noch ermöglichen.
Schon seit vielen Jahren kann ich mich nur in ganz beschränktem Umfang meinen mathematischen Arbeiten widmen, auch die vorlesungsfreie Zeit ist zum großen Teil mit Prüfungen, Gesprächen mit Diplomanden, Doktoranden und Verwaltungsarbeiten ausgefüllt. Das Semester bringt zusätzlich die Vorlesungsverpflichtungen, Seminare, immer wieder lange Sitzungen mit zum Teil völlig sinnlosen, dafür aber umso längeren Diskussionen, der Streß insgesamt ist gesundheitlich nicht mehr zu verantworten. Wenn die Forschung ganz zum Erliegen kommt, dann werden die Vorlesungen langweilig und für die Studenten gibt es keine interessanten Themen für Diplom- und Doktorarbeiten mehr. Kommen dann noch Studiengänge mit einer übertriebenen Festlegung des Studienstoffes im einzelnen, dann wird die Lehre allmählich zu einer ständigen Wiederholung eines einmal fixierten Schemas, und die Professoren werden mit Recht zum Gespött der Studenten.
In Bonn wird die Reine Mathematik durch einen Sonderforschungsbereich wirklich großzügig gefördert. Wir können zum Beispiel in jedem Jahr Gastprofessoren und junge Mathematiker aus vielen Ländern einladen und internationale Tagungen veranstalten. Es ist paradox, wenn die Bonner Mathematiker kaum noch Zeit und innere Ruhe haben, um die hervorragenden Arbeitsmöglichkeiten, die kaum irgendwo in der Welt besser sind, auszunutzen.
Viele mathematische Institute der Bundesrepublik haben nach dem Krieg sehr schnell wieder ein Niveau in Lehre und

Forschung erreicht, das in der ganzen Welt anerkannt wird. Es ist ihnen zu danken, daß die zahlreichen Professuren der neuen Universitäten qualitativ noch recht gut besetzt werden konnten. Die wissenschaftlichen Assistenten hatten in diesen Instituten etwa die Hälfte ihrer Zeit für ihre Forschung zur Verfügung, hatten Kontaktmöglichkeiten zu Mathematikern aus aller Welt. Sie wurden oft zu Studienaufenthalten an mathematische Institute des Auslands beurlaubt. Unseren Nachwuchsmathematikern müssen derartige Möglichkeiten erhalten bleiben. Wir müssen aus dem Tief, in das unsere Universitäten geraten sind, wieder heraus. Die gute Zusammenarbeit zwischen Professoren, Assistenten und Studenten, die früher an der Mehrzahl der mathematischen Institute so selbstverständlich war, daß sie niemandem aufgefallen ist, muß wieder hergestellt werden. Das ist schwierig, weil die sogenannten Gruppeninteressen jetzt systematisch eingebaut sind.
Aber insgesamt ist die Bilanz meiner Erfahrungen in dieser Zusammenarbeit auch in den letzten Jahren sehr positiv,und das stimmt optimistisch - bei der Bildung der Bilanz wurden nicht nur die Mitglieder von Konferenzen und Satzungskonventen berücksichtigt.
Deshalb kann ich Ihnen trotz allem zurufen:

Viel Freude und Erfolg bei Ihrem Studium!

Allen Nichtmathematikern danke ich für ihre Geduld, mit der sie die mathematischen Teile des Vortrags ertragen haben.