# ANALYTISCHE GEOMETRIE I

SKRIPTUM

ausgearbeitet von

U. Karras M. Kreck H.D. Vohmann

nach einer Vorlesung von

F. Hirzebruch

Wintersemester 1968/69

Als Manuskript gedruckt und herausgegeben von der
Fachschaft Mathematik/Physik an der Universität Bonn

## Sachverzeichnis


| | | Definition | Seite |
|---|---|---|---|
| A | Abbildung | 2.4. | 7 |
| | -'bijektive | 2.5. | 8 |
| | -,bilineare | | 60 |
| | -,identische | 2.7. | 9 |
| | -,injektive | 2.5. | 8 |
| | -,lineare | 8.1. | 51 |
| | -,multilineare | 11.4. | 93 |
| | -,surjektive | 2.5. | 8 |
| B | Basis | 7.5. | 47 |
| | -,endliche | 7.2. | 39 |
| | -,duale | | 99 |
| | Bild einer linearen Abbildung | 10.3. | 69 |
| C | Cramersche Regel | 11.11 (Satz) | 105 |
| D | Determinante einer Matrix | 11.2. | 89 |
| | -,eines Endomorphismus | | 101 |
| | Dimension eines Vektorraumes | 7.6. | 48 |
| | Durchschnitt | 2.2. | 6 |
| E | Endomorphismus | | 60 |
| | Endomorphismenring L(X) | | 61 |
| F | Funktor, kontravarianter | | 100 |
| G | Gleichungssystem, homogenes | | 72 |
| | -, inhomogenes | | 72 |
| | -,lineares | | 69-89 |
| | Gruppe | 1.4. | 3 |
| | -,allgemeine lineare GL(X) | | 68 |
| | -,alternierende $A_n$ | | 91 |

| | | Definition | Seite |
|---|---|---|---|
| | Gruppe, endliche | 5.2. | 13 |
| | -,lineare L(X,Y) | 8.3. | 54 |
| | -,symmetrische $S_n$ | | 12 |
| H | Homomorphismus von Gruppen | 11.3. | 93 |
| I | Isomorphismus von Vektorräumen | 8.2. | 53 |
| | -,von Gruppen | 9.3. | 66 |
| | -,von Ringen | 9.3. | 67 |
| K | Kern einer linearen Abbildung | 10.2. | 69 |
| | Klasseneinteilung | 5.1. | 22 |
| | Körper | 4.4. | 16 |
| | Kroneckersymbol | | 97 |
| L | Laplace'scher Entwicklungssatz | 11.9. (Satz) | 103 |
| | Linearform | | 59 |
| | Linearkombination | | 57 |
| M | Mannigfaltigkeit, lineare | 10.5. | 70 |
| | Matrix | 9.1. | 62 |
| | -,algebraisches Komplement | 11.6. | |
| | -,invertierbare | 10.8. | |
| | -,reguläre | 10.8. | |
| | Matrix eines Basiswechsels | | 87 |
| | Matrizenring $\mathfrak{M}$ (n,n) | | 62-68 |
| | Menge | | 1 |
| | -,leere $\emptyset$ | | 6 |
| | -,Anzahl der Elemente einer | | 47 |
| | Multilinearform | 11.4. | |
| | -,alternierende | 11.5. | |
| | -,Menge der alternierenden $\Lambda^k(X^*)$ | | 94-101 |
| N | $\mathbb{N}$ | | 1 |
| | n-Tupel | 6.7. | |

| | | Definition | Seite |
|---|---|---|---|
| | $M^n$-Menge der n-Tupel über M | 6.7. | |
| | Nullität einer linearen Abbildung | | 86 |
| O | Operation auf einer Menge | 1.2. | |
| | -,erlaubte | | 72,73 |
| P | Permutation | | 12 |
| | Produkt von Mengen | 1.1. | |
| Q | $\mathbb{Q}$ | | 1 |
| R | $\mathbb{R}$ | | 18 |
| | Rang einer linearen Abbildung | 10.4. | 70 |
| | Rang einer Matrix = Zeilenrang | | |
| | Relation | 5.2. | 22 |
| | Ring | 4.1. | 14 |
| | -,kommutativer | 4.1. | 14 |
| | - mit Einselementen | 4.2. | 15 |
| S | Signum einer Permutation | 11.1. | 89 |
| | Spaltenrang | 10.6. | 78 |
| | Steinitz'scher Austauschsatz | 7.9. (Satz) | 44 |
| | Summe von Vektorräumen U+V | 7.5. | 41 |
| T | Teilmenge | 1.3. | 2 |
| | Transportation | | 89 |
| U | Unabhängigkeit, lineare | 7.1. | 39 |
| | Untergruppe | 1.8. | 5 |
| | Unterkörper | 4.5. | 17 |
| | Unterraum | 6.9. | 34 |
| | Unterring | 4.3. | 15 |
| V | Vektorraum | 6.1. | 31 |
| | -,dualer $X^*$ | | 59 |
| | -,aufgespannter [M] von einer Menge M | 7.3. | 40 |

| | | Definition | Seite |
|---|---|---|---|
| | Vektoren = Elemente eines Vektorraumes | | |
| Z | Z | | 1 |
| | Zeilenrang | 10.7. | 79 |


## Literatur


1) H.J. Kowalsky, Lineare Algebra
Walter de Gruyter, Berlin 1967

2) W. Graeub, Lineare Algebra
Grundlehren der math. Wissenschaften Bd 97
Springer, Berlin

3) S. Lang, Linear Algebra
Addison- Wesley, Reading / Mass. 1966

4) H. Tietz, Lineare Geometrie
Aschendorff, Münster 1967


Besonders häufig wurde das Buch
von Kowalsky benutzt.

## § 1 Der Gruppenbegriff

Unter einer Menge verstehen wir "jede Zusammenfassung M von bestimmten,wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen" (Cantor 1845 - 1918). Die Objekte werden Elemente von M genannt.
Man schreibt $x \in M$ genau dann,wenn x Element von M ist;
$x \notin M$ genau dann,wenn x nicht Element von M ist.

Eine Menge kann durch ihre Elemente folgendermaßen angegeben werden: $M = \{a,b,c,\ldots\}$,wobei zwischen den Klammern alle Elemente von M explizit oder durch eine Eigenschaft aufgeführt werden.

Beispiele: 1) Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge,die man mit $\mathbb{N}$ bezeichnet:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\} \quad .$$

2) Die ganzen Zahlen bilden eine Menge,die man mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} \quad .$$

3) Die rationalen Zahlen bilden eine Menge,die man mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Definition 1.1

Seien M,N Mengen und seien $a,c \in M$, $b,d \in N$.
(a,b) heißt geordnetes Paar.
$(a,b)=(c,d)$ genau dann,wenn $a=c$ und $b=d$ ist.
Die Menge aller Paare (a,b) mit $a \in M, b \in N$ bezeichnen wir mit $M \times N$.

Definition 1.2

Sei M eine Menge.
Eine Operation $\circ$ auf M ist eine Vorschrift,die jedem

Paar $(a,b)$ mit $a \in M$ und $b \in M$ genau ein Element $a \circ b \in M$ zuordnet.

<u>Beispiele</u>: Sei $M = \mathbb{N}$. Dann sind "+" und "·" Operationen auf M. Dagegen ist "−" keine Operation auf M, denn $3-5 = -2 \notin \mathbb{N}$.

Die Addition + auf $\mathbb{Z}$ erfüllt folgende Eigenschaften:

0) + ist eine Operation auf $\mathbb{Z}$.

Für beliebige $a,b,c \in \mathbb{Z}$ gelten:

I) $a+(b+c) = (a+b)+c$ (assoziatives Gesetz)

II) $0+a = a$

III) Zu a gibt es $a' \in \mathbb{Z}$ mit $a'+a = 0$

IV) $a+b = b+a$ (kommutatives Gesetz).

<u>Definition 1.3</u>

Seien M und N Mengen.
N heißt Teilmenge von M (man schreibt: $N \subset M$) genau dann, wenn für alle $x \in N$ gilt: $x \in M$.
Sei $N \subset M$.
$M-N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$, d.h. M−N besteht aus allen x, die die Eigenschaften $x \in M$ und $x \notin N$ erfüllen.

In der Menge $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} - \{0\} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ und } x \neq 0\}$ erfüllt die Multiplikation · folgende Eigenschaften:

0) · ist eine Operation auf $\mathbb{Q}^*$

Für beliebige $a,b,c \in \mathbb{Q}^*$ gelten:

I) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

II) $1\cdot a = a$

III) Zu a gibt es $a' \in \mathbb{Q}^*$ mit $a'\cdot a = 1$

IV) $a \cdot b = b \cdot a$

Beachte: In $\mathbb{Q}$ gilt III) nicht, da es kein $a' \in \mathbb{Q}$ mit $a' \cdot 0 = 1$ gibt.

Definition 1.4

Eine Gruppe ist eine Menge G, auf der eine Operation $\circ$ definiert und in der ein Element $e \in G$ ausgezeichnet ist, so daß die folgenden Eigenschaften (Axiome) für alle $a, b, c \in G$ erfüllt sind:

I) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

II) $e \circ a = a$

III) Zu a gibt es $a' \in G$ mit $a' \circ a = e$ .

Die Gruppe G heißt kommutativ oder abelsch, wenn für beliebige $a, b, c \in G$ gilt:

IV) $a \circ b = b \circ a$

$\mathbb{Z}$ mit der Operation + und $\mathbb{Q}^*$ mit der Operation $\cdot$ bilden also kommutative Gruppen.

Folgerungen aus den Gruppenaxiomen

1) $a' \circ a = e \Rightarrow a \circ a' = e$

(Seien A und B Aussagen. "$A \Rightarrow B$" heißt: Wenn A wahr ist, dann ist B wahr. "$A \Leftrightarrow B$" heißt: $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. Man sagt für "$A \Leftrightarrow B$" auch: A gilt genau dann, wenn B gilt.)

2) $a \circ e = a$ für alle $a \in G$

3) Für jedes Element $e^* \in G$, das Axiom II) erfüllt, gilt $e^* = e$. Man nennt e deshalb das neutrale Element von G.

4) Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein Element $a' \in G$ mit $a' \circ a = e$, das auch das inverse Element zu a genannt und mit $a^{-1}$ bezeichnet wird.

5) $(a^{-1})^{-1} = a$ für alle $a \in G$

6) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ für beliebige $a, b \in G$

<u>Beweise:</u>

Zu 1) Nach Axiom III) gibt es zu $a' \in G$ ein $a'' \in G$ mit
$a'' \circ a' = e$.
Mit I) und III) folgt:
$$a \circ a' = e \circ (a \circ a') = (a'' \circ a') \circ (a \circ a') = a'' \circ (a' \circ (a \circ a')) =$$
$$= a'' \circ ((a' \circ a) \circ a') = a'' \circ (e \circ a') = a'' \circ a' = e \ .$$

Zu 2) Unter Verwendung von 1) gilt:
$$a \circ e = a \circ (a' \circ a) = (a \circ a') \circ a = e \circ a = a,$$

Zu 3) Es gilt:
$$e^* = e \circ e^* = e^* \circ e = e \ .$$

Zu 4) Sei $a^*$ ein weiteres Element von G, für das $a^* \circ a = e$ ist
Dann gilt:
$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a) \circ a' = e \circ a' = a' \ .$$

Zu 5) $$(a^{-1})^{-1} = e \circ (a^{-1})^{-1} = (a \circ a^{-1}) \circ (a^{-1})^{-1} =$$
$$= a \circ (\underbrace{a^{-1} \circ (a^{-1})^{-1}}_{=e}) = a \ .$$

Zu 6) Es gilt:
$$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ (a^{-1} \circ (a \circ b)) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b) =$$
$$= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e \ .$$

<u>Definition 1.5</u>

Sei G eine Gruppe, $a \in G$, $n \in \mathbb{N}$ .

$$a^n := \underbrace{a \circ a \circ a \circ \ldots \circ a}_{n\text{-mal}}$$

<u>Erläuterung:</u> Die Definition ist sinnvoll, da in einer Gruppe G das allgemeine Assoziativgesetz gilt, d.h. bei einer endlichen Anzahl von Hintereinanderschaltungen der Operation hängt das Ergebnis nicht von der Stellung der Klammern ab.

Definition 1.6

Sei $n \in \mathbb{Z}$ .

$$a^n := \begin{cases} a^n & \text{für } n>0 \\ e & \text{für } n=0 \\ (a^{-n})^{-1} & \text{für } n<0 \end{cases}$$

Man beweist damit leicht die folgenden Aussagen:
Für $a \in G$, $n,m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$\alpha$) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$\beta$) $a^n \circ a^m = a^{n+m}$ .

Ist G kommutativ, so gilt außerdem für $a,b \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ :

$\gamma$) $(a \circ b)^n = a^n \circ b^n$ .

Dieser Potenzschreibweise für eine multiplikativ geschriebene Gruppe entsprechend definieren wir für eine additiv geschriebene Gruppe G:

Definition 1.7

Sei $n \in \mathbb{N}$ , $a \in G$.

$\alpha$) $n \cdot a := \underbrace{a+a+ \ldots +a}_{n\text{-mal}}$

Sei $n \in \mathbb{Z}$ , $a \in G$.

$\beta$) $$n \cdot a := \begin{cases} na & \text{für } n>0 \\ 0 & \text{für } n=0 \\ -((-n)a) & \text{für } n<0 \end{cases}$$

Bemerkung: Die für das Rechnen mit Potenzen oben angegebenen Gesetze gelten in entsprechender Schreibweise.

Definition 1.8

Eine nicht leere Teilmenge U einer (additiv geschriebenen) Gruppe G heißt Untergruppe von G, wenn für alle $a,b \in G$ gilt:

$$a-b \in G \quad .$$

## § 2 Mengen und Abbildungen

**Definition 2.1**

Seien M und N Mengen.

$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$.

Man nennt $M \cup N$ die Vereinigung von M und N.

(Seien A und B Aussagen. Die Aussage "A oder B" ist wahr genau dann, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen wahr ist. Man schreibt für "A oder B" abkürzend $A \vee B$.)

**Definition 2.2**

Seien M und N Mengen.

$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$.

Man nennt $M \cap N$ den Durchschnitt von M und N.

(Seien A und B Aussagen. Die Aussage "A und B" ist wahr genau dann, wenn sowohl A als auch B wahr ist. Man schreibt für "A und B" abkürzend $A \wedge B$.)

Beispiele: $M = \{1,2,3\}$ ; $N = \{2,3,5\}$

$M \cap N = \{2,3\}$

$M \cup N = \{1,2,3,5\}$

Mit $\emptyset$ bezeichnet man die leere Menge, d.h. die Menge, die kein Element enthält.

Beispiel: $M = \{1,2\}$ ; $N = \{4\}$

$M \cap N = \emptyset$

**Definition 2.3**

Seien M und N Mengen.

Sei $M \subset N$. Man sagt:
M ist <u>echte Teilmenge</u> von N, wenn $M \neq N$ ist.

Eigenschaften von $\cap$ und $\cup$.

Seien $M_1, M_2, M_3$ beliebige Mengen.

1) $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$
2) $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$
3) $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$
4) $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$
5) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$
6) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

} Distributivgesetze

<u>Beweise</u>:

Zu 5) $x \in M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \Leftrightarrow x \in M_1 \wedge x \in M_2 \cup M_3$

$x \in M_1 \wedge x \in M_2 \cup M_3 \Leftrightarrow x \in M_1 \wedge [x \in M_2 \vee x \in M_3]$

$x \in M_1 \wedge [x \in M_2 \vee x \in M_3]$

$\Leftrightarrow [x \in M_1 \wedge x \in M_2] \vee [x \in M_1 \wedge x \in M_3]$

$[x \in M_1 \wedge x \in M_2] \vee [x \in M_1 \wedge x \in M_3]$

$\Leftrightarrow x \in (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$ .

Zu 6) Der Beweis verläuft entsprechend.

Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subset M$ .

Für zwei Mengen M und N gilt:

$$M \cap N = M \Leftrightarrow M \subset N$$
$$M \cup N = M \Leftrightarrow N \subset M$$

<u>Definition 2.4</u>

Seien X und Y Mengen.
Eine <u>Abbildung</u> f von X in Y ist eine Vorschrift, die jedem

$x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.
Man nennt $f(x)$ das Bild von $x$ und $x$ ein Urbild von $f(x)$.

Man beschreibt eine solche Abbildung folgendermaßen:

$$f: \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{für } x \in X \ .$$

<u>Beispiel:</u> $f: \begin{array}{l} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ x \longmapsto x^4 + 3x^5 + 32 \end{array}$

<u>Definition 2.5</u>

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.

$\alpha$) $f$ heißt <u>injektiv</u>
$\Longleftrightarrow$ für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
(d.h. zu jedem Bild gibt es genau ein Urbild)

$\beta$) $f$ heißt <u>surjektiv</u>
$\Longleftrightarrow$ für jedes $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x)=y$
(d.h. jedes Element $y \in Y$ ist Bild)

$\gamma$) $f$ heißt <u>bijektiv</u>
$\Longleftrightarrow$ $f$ ist injektiv und $f$ ist surjektiv

Wir verdeutlichen die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv an folgenden Beispielen von Abbildungen.

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

1) $x \mapsto x^2$. Die Abbildung ist weder injektiv noch surjektiv.

2) $x \mapsto x^3$. Die Abbildung ist injektiv, aber nicht surjektiv.

3) $x \mapsto f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{für } x \geq 0 \\ x+2 & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$. Die Abbildung ist surjektiv, aber nicht injektiv.

4) $x \mapsto x+2$. Die Abbildung ist bijektiv.

Für bijektive Abbildungen $f: X \to Y$ kann man die <u>Umkehrabbildung</u> $f^{-1}: Y \to X$ einführen.

Sei $y \in Y$. Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x)=y$.
$f^{-1}(y):=x$.
Trivialerweise ist $f^{-1}$ wieder bijektiv.

Definition 2.6

Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen.
Dann ist $g \circ f: X \longrightarrow Z$ die Abbildung mit $x \longmapsto g(f(x))$.

Beispiel: $X = Y = Z := \mathbb{N}$

$f(x) = x+1 \quad ; \; g(x) = x+5$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)+5 = x+6$

Bemerkung: Seien $f: X \to Y, g: Y \to Z, h: Z \to A$ Abbildungen.
Dann sind die Abbildungen $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ definiert und es gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Beweis:

Sei $x \in X$.

$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$

$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$

Definition 2.7

Sei $X$ eine Menge.
$Id_X: X \longrightarrow X$ sei die durch $Id_X(x) = x$ für alle $x \in X$ definierte Abbildung.
Diese Abbildung heißt identische Abbildung.

Bemerkungen: 1) Für jede Abbildung $f: X \to Y$ gilt:

$$f \circ Id_X = f = Id_Y \circ f \quad .$$

2) Sei $f: X \to Y$ eine bijektive Abbildung.
Dann gilt:
$f^{-1} \circ f = Id_X$, denn für $x \in X$ ist $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ ;
$f \circ f^{-1} = Id_Y$, denn für $y \in Y$ ist $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ .

3) Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ Abbildungen und ist $f \circ g = Id_Y$ und $g \circ f = Id_X$, dann sind f und g bijektiv und es gilt $f = g^{-1}$ und $g = f^{-1}$.

Zum Beweis zeigt man leicht, daß wegen $f \circ g = Id_Y$ f surjektiv und g injektiv und wegen $g \circ f = Id_X$ f injektiv und g surjektiv sind. Für die bijektiven Abbildungen f und g folgt dann mit 1) und 2):

$$f^{-1} = f^{-1} \circ Id_Y = f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = Id_X \circ g = g$$

und entsprechend $g^{-1} = f$ .

Definition 2.8

$f: A \to B$ sei gegeben und $X \subset A$.
$f|X: X \to B$ ist die Abbildung mit $(f|X)(y) = f(y)$ für alle $y \in X$ .
$f|X$ heißt Einschränkung von f auf X und
f heißt Fortsetzung von $f|X$ .

## § 3 Die symmetrische Gruppe

In der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gilt das Prinzip der vollständigen Induktion.

Sei $T \subset \mathbb{N}$ und gelte:

a) $1 \in T$

b) $n \in T \Rightarrow n+1 \in T$ für alle $n \in \mathbb{N}$ .

Dann gilt: $T = \mathbb{N}$ .

Satz 3.1

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien M und N Mengen von jeweils n Elementen.

Dann gibt es genau n! bijektive Abbildungen von M auf N.

Beweis:

Sei T die Menge der natürlichen Zahlen n, für die der Satz richtig ist.

a) Für n=1 ist der Satz richtig, also gilt $1 \in T$.

b) Sei $n \in T$. Wir betrachten die Behauptung des Satzes für n+1:
Sei $a \in M$. Die Anzahl der möglichen verschiedenen Bilder von a ist n+1. Sei a ein Element $b \in N$ zugeordnet. Aus $n \in T$ folgt: Die Anzahl der verschiedenen bijektiven Abbildungen von M in N, die a in b überführen, ist n!. Somit gibt es genau $(n+1)\cdot n! = (n+1)!$ bijektive Abbildungen von M in N. Also gilt $n+1 \in T$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt: $T = \mathbb{N}$ .

Bemerkung: Es seien A,B endliche Mengen, wobei die Anzahl ihrer Elemente übereinstimmt. Aus der Injektivität (und ebenfalls aus der Surjektivität) einer Abbildung $f: A \to B$ folgt, daß f bijektiv ist (Beweis als Übung).

Definition 3.1

Sei M eine Menge.
Die Menge aller bijektiven Abbildungen von M auf M wird mit $S_M$ bezeichnet.

Folgerung: Für $M = \{1,\ldots,n\}$ hat $S_M$ $n!$ verschiedene Elemente.

Satz 3.2

Sei M eine Menge.
Dann ist $S_M$ mit der Operation $(f,g) \longmapsto f \circ g$ eine Gruppe.

Daß $S_M$ die Gruppenaxiome erfüllt, folgt unmittelbar aus den in § 2 bewiesenen Eigenschaften von Abbildungen.

Für $M = \{1,\ldots,n\}$ bezeichnet man die Gruppe der bijektiven Abbildungen von M in M mit $S_n$ und nennt $S_n$ die symmetrische Gruppe (Permutationsgruppe von n Elementen).

Jedes Element der symmetrischen Gruppe $S_n$ kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix} .$$

Behauptung: $S_3$ ist eine nicht kommutative Gruppe.

Beweis:

$S_3$ hat folgende Elemente:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dann ist zum Beispiel:

$$f_1 \circ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_3$$

$$f_5 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_4 \quad .$$

<u>Definition 3.2</u>

Eine Gruppe, die nur endlich viele Elemente hat, heißt endlich.

In einer endlichen Gruppe $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit der Operation $\circ$ kann diese Operation in einer Gruppentafel dargestellt werden, die folgendermaßen aussieht:

| $\circ$ | $a_1$ | $a_2$ | $\cdots$ | $a_k$ | $\cdots$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1 \circ a_1$ | $a_1 \circ a_2$ | $\cdots$ | $a_1 \circ a_k$ | $\cdots$ | $a_1 \circ a_n$ |
| $a_2$ | $a_2 \circ a_1$ | $a_2 \circ a_2$ | $\cdots$ | $a_2 \circ a_k$ | $\cdots$ | $a_2 \circ a_n$ |
| $\vdots$ | | | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $a_i$ | $a_i \circ a_1$ | $\cdots\cdots$ | | $a_i \circ a_k$ | $\cdots$ | $a_i \circ a_n$ |
| $\vdots$ | | | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $a_n$ | $a_n \circ a_1$ | $\cdots\cdots$ | | $a_n \circ a_k$ | $\cdots$ | $a_n \circ a_n$ |

Es muß also im Schnittpunkt der i-ten Zeile und der k-ten Spalte das Element $a_i \circ a_k$ stehen.

Als Beispiel möge sich der Leser die Gruppentafel für $S_3$ aufschreiben.

## § 4 Ringe und Körper

Definition 4.1

Ein Ring ist eine Menge R, auf der zwei Operationen, die Multiplikation $\cdot$ und die Addition $+$, erklärt sind und in der ein Element $0 \in R$ ausgezeichnet ist, so daß für alle $a, b, c \in R$ gilt:

a) Axiome für die Addition

I) $(a+b)+c = a+(b+c)$

II) $0+a = a$

III) Zu a existiert ein Element $-a \in R$ mit $(-a)+a = 0$

IV) $a+b = b+a$

b) Assoziatives Gesetz der Multiplikation

V) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

c) Distributive Gesetze

VI) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
$(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$

Gilt außerdem

VII) $a\cdot b = b\cdot a$
für alle $a, b \in R$, dann heißt R kommutativer Ring .

Bemerkung: Die unter a) aufgeführten Axiome kann man durch die Forderung "R ist bezüglich + eine kommutative Gruppe" ersetzen.
Die Gruppenaxiome I), II), III) implizieren, daß 0 und $-a$ eindeutig bestimmt sind (siehe §1).
Ferner ist $b+(-c)$ das eindeutig bestimmte Element x, welches der Gleichung $x+c=b$ genügt und mit $b-c$ bezeichnet wird.
Die Äquivalenz

$$x+c = b \iff x = b-c$$

wird später bei den Beweisen von Folgerungen aus den Ringaxiomen verwendet.

Definition 4.2

Der Ring R heißt Ring mit Einselement, wenn ein Element $1 \in R$ ausgezeichnet ist mit
$1 \neq 0$ und $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ für alle $a \in R$.

Definition 4.3

Eine nicht leere Teilmenge R' eines Ringes R heißt Unterring von R, wenn mit Elementen $a, b \in R'$ auch stets $a-b$ und $a \cdot b$ zu R' gehören.

Ist R' ein Unterring, dann folgt $0 \in R'$, da wenigstens ein a zu R' gehört und $0=a-a$.

Ist $b \in R'$, dann gilt auch $-b=0-b \in R'$. Die Operationen + und · führen aus R' nicht heraus. Für · steht dies in der Definition, für + beachte

$$a, b \in R' \Rightarrow a, -b \in R'$$
$$a, -b \in R' \Rightarrow a+b = a-(-b) \in R' \quad .$$

Die Gültigkeit der Ringaxiome I, IV, V, VI für R' bezüglich der in R erklärten Operationen folgt aus ihrer Gültigkeit in R.
Jeder Unterring ist also ein Ring.

Ist R ein Ring mit Einselement 1 und ist 1 Element des Unterringes R', dann ist natürlich auch R' ein Ring mit Einselement 1.

Beispiel: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist bezüglich + und · ein Ring mit Einselement.
Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $2\mathbb{Z}$ der geraden Zahlen sind Unetrringe.
$\mathbb{Z}$ ist ein Ring mit Einselement, $2\mathbb{Z}$ dagegen nicht.

Folgerungen aus den Ringaxiomen:

Sei R ein Ring. Dann gilt für Elemente $a,b,c \in R$

1) $a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c$

2) $(b-c)\cdot a = b\cdot a - c\cdot a$

3) $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$

4) $a\cdot(-c) = (-a)\cdot c = -ac$

5) $(-a)(-c) = ac$

Beweise:

Zu 1) Wegen der in der obigen Bemerkung angegebenen Äquivalenz ist zu zeigen

$$a\cdot(b-c) + a\cdot c = a\cdot b \quad .$$

Dies folgt aus dem Distributivgesetz, denn

$$a(b-c) + a\cdot c = a\cdot((b-c) + c) = a\cdot b \quad .$$

Zu 2) Der Beweis verläuft unter Verwendung des 2. Distributivgesetzes wie bei 1).

Zu 3)
$$a\cdot 0 = a\cdot(0-0) = a\cdot 0 - a\cdot 0 = 0$$
$$0\cdot a = (0-0)\cdot a = 0\cdot a - 0\cdot a = 0$$

Zu 4) Die Beweise folgen aus 1),2),3), wenn man in 1) und 2) speziell 0 für b einsetzt.

Zu 5)
$$(-a)(-c) = -(-a)c = -(-ac) = ac$$

Definition 4.4

Ein Körper K ist ein kommutativer Ring mit Einselement 1, für den gilt

VIII) Zu je zwei Elementen $a,b \in K$ mit $a \neq 0$ existiert ein $x \in K$ mit $ax=b$.

Insbesondere gibt es in dem Körper K für jedes $a \neq 0$ ein Element $a^{-1}$ mit $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$ und wegen $1 \neq 0$ gilt $a^{-1} \neq 0$.

<u>Folgerung</u>: Seien $a,b \in K$. $a \neq 0$ und $b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$ .

<u>Beweis</u>:

Aus $a \neq 0$ folgt: Es gibt ein $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1} \cdot a = 1$ . Wäre nun $a \cdot b = 0$, dann wäre auch $b = a^{-1} \cdot (ab) = 0$ .

Also bildet die Menge $K^* = K - \{0\}$ der von 0 verschiedenen Elemente von K eine kommutative Gruppe bezüglich der Multiplikation mit dem Einselement 1 des Körpers K als neutralem Element. Nach Folgerung 4) aus den Gruppenaxiomen (Def.1.4) ist $a^{-1}$ eindeutig bestimmt.

Aus $ax=b$ und $a \neq 0$ folgt: $x=a^{-1}b$. Das Element x in VIII) ist also eindeutig bestimmt und wird mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet

$$\left( \frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1} \right) .$$

<u>Beispiel</u>: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen bildet einen Körper.

<u>Definition 4.5</u>

Ein <u>Unterkörper K'</u> des Körpers K ist ein Unterring von K mit $1 \in K'$ und der Eigenschaft:
Aus $a \in K'$ und $a \neq 0$ folgt $a^{-1} \in K'$ .

Man kann einen Unterkörper K' auch durch folgende Forderungen für alle $a,b \in K'$ definieren:

$$0,1 \in K'$$

$$a,b \in K' \Rightarrow a-b \in K'$$

$$a,b \in K' \wedge b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \in K' \quad .$$

Zur Übung möge der Leser zeigen, daß jeder Unterkörper von $\mathbb{Q}$ gleich $\mathbb{Q}$ ist.

Für die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \ .$$

In der Vorlesung über Infinitesimalrechnung wird der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen eingeführt, der $\mathbb{Q}$ als Unterkörper hat. Die reellen Zahlen können bijektiv auf jede Gerade g der Elementargeometrie abgebildet werden (g wird als Punktmenge aufgefaßt). Dies folgt aus den fundamentalen Eigenschaften der reellen Zahlen und den Axiomen der Elementargeometrie.

Für die bijektive Abbildung $\mathbb{R} \to g$ sollen kurz einige Eigenschaften angegeben werden. Die benötigten Sätze der Elementargeometrie setzen wir dabei als bekannt voraus. Die folgenden Betrachtungen gehören nicht zum systematischen Aufbau der algebraischen Begriffe (Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum, usw.). Sie sollen die Beziehungen zur Geometrie beleuchten. Hierbei kann keine Exaktheit erreicht werden, da weder die axiomatische Begründung der Geometrie (D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie) noch die Einführung der reellen Zahlen im Rahmen dieser Vorlesung behandelt werden können.

Betrachte eine Gerade g der Elementargeometrie. Auf g zeichnen wir einen Punkt $P_0$ aus.

Wir definieren $z \circ P$ für $z \in \mathbb{Z}$ und $P \in g$. Mit $-P$ bezeichnen wir den Punkt, der durch Spiegelung von P an $P_0$ erhalten wird.

1) $0 \circ P := P_0$ für alle $P \in g$

2) $z \circ P_0 := P_0$ für alle $z \in \mathbb{Z}$

3) Sei $z > 0$ und $P \neq P_0$ .
$z \circ P$ ist der Endpunkt, der durch z-maliges Hintereinanderabtragen der Strecke $\overline{P_0P}$ von $P_0$ aus auf den durch P gehenden Halbstrahl erhalten wird.

4) Sei $z < 0$ und $P \neq P_0$ .
$z \circ P =: (-z) \circ (-P)$

Wir zeichnen jetzt einen Punkt $P_1 \in g$ mit $P_1 \neq P_0$ aus.

Definition 4.6

$j_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to g$ sei definiert durch

$$j_{\mathbb{Z}}(n) = n \circ P_1 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

$j_{\mathbb{Z}}$ hat eine Fortsetzung (siehe Def.2.8)

$$j_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to g ,$$

die wie folgt definiert wird.
Sei $r \in \mathbb{Q}$ mit $r=\frac{a}{b}$, $a,b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$. Dann gibt es auf $g$ genau einen Punkt $P$ mit

$$b \circ P = a \circ P_1 ,$$

der nur von $r$ abhängt. Wir definieren

$$j_{\mathbb{Q}}(r) := P .$$

Satz 4.1

Es gibt keine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2=2$ .

Beweis:

Die Annahme "Es gibt $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2=2$" soll zum Widerspruch geführt werden:
$r$ besitzt eine Darstellung $r=\frac{a}{b}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen $a$ und $b$. Es sind dann $a$ und $b$ nicht beide gerade Zahlen.

$$r^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \; ; \quad \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Daraus folgt: $a$ ist gerade; denn wäre $a$ ungerade, so wäre auch $a^2$ ungerade und $a^2 \neq 2b^2$.
Also gilt $a=2c$ mit $c \in \mathbb{Z}$.

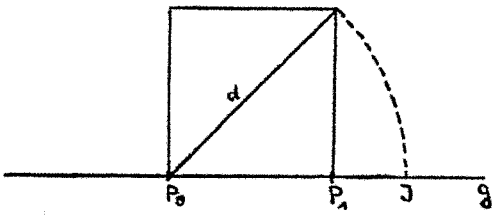
$$a^2 = 2b^2 \wedge a = 2c \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2$$

Wie oben folgt daraus: $b$ ist gerade.
Das steht im Widerspruch dazu, daß $a,b$ nicht beide gerade sind.
Also gibt es kein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2=2$ .

Behauptung:

$j_{\mathbb{Q}}$ ist nicht surjektiv.

Zum Beweis betrachten wir auf g das Quadrat über $\overline{P_0P_1}$ :




Aus Satz 4.1 folgt mit dem Satz des Pythagoras, daß es kein $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a \circ P_1 = b \circ J \ .$$

Da wir den Körper der reelen Zahlen nicht definiert haben, ist es uns nicht möglich, auf die "topologischen" Eigenschaften von $\mathbb{R}$ und g einzugehen, die Begriffe wie Stetigkeit, Konvergenz, usw. erst sinnvoll machen würden. Die in dem folgenden Satz enthaltene wichtige Eigenschaft von $\mathbb{R}$ kann deshalb nur ohne Beweis angegeben werden.

<u>Satz 4.2</u>

Es gibt genau eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung $f: \mathbb{R} \to g$ mit $f|\mathbb{Q} = j_{\mathbb{Q}}$ .

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ist die Menge der nicht rationalen (d.h. irrationalen) Zahlen.

Die reellen Zahlen lassen sich durch unendliche Dezimalbrüche oder auch durch unendliche Kettenbrüche darstellen.

<u>Beispiel</u>:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Berechnet man die Brüche $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2+\frac{1}{\ }}$ , ...,dann erhält man die Folge $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$,...,die gegen $\sqrt{2}$ "konvergiert".

"Ein unendlicher Dezimalbruch stellt die reelle Zahl a dar" bedeutet, daß die entsprechende Folge unendlicher Dezimalbrüche gegen a konvergiert. Dabei ist a rational genau dann, wenn der Dezimalbruch periodisch ist.
Die genauen Begründungen all dieser Behauptungen gehört in die Infinitesimalrechnung.

## § 5 Äquivalenzklassen

**Definition 5.1**

Seien M und $\mathfrak{J}$ Mengen. Eine Menge $\{M_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{J}\}$ von Teilmengen von M heißt Klasseneinteilung von M genau dann, wenn

1.) Für alle $\alpha \in \mathfrak{J}$ gilt: $M_\alpha \neq \emptyset$

2.) $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{J}} M_\alpha = M$

3.) $\alpha, \beta \in \mathfrak{J}$ und $\alpha \neq \beta \Rightarrow M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$ .

**Definition 5.2**

Sei M eine Menge. Für jedes Paar $(a,b) \in M \times M$ sei erklärt, ob die Aussage $a \sim b$ wahr ist oder nicht.
Wir nennen $\sim$ eine Relation.
$\sim$ heißt eine Äquivalenzrelation, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

1.) Für jedes $a \in M$ gilt: $a \sim a$ . (Reflexivität)

2.) Für $a,b,c \in M$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$ gilt: $a \sim c$ . (Transitivität)

3.) Für $a,b \in M$ mit $a \sim b$ gilt: $b \sim a$ .(Symmetrie)

Sei $\sim$ eine Relation auf der Menge M. Durch $\sim$ wird eine Teilmenge R von $M \times M = \{(a,b) \mid a \in M \wedge b \in M\}$ definiert;
$R := \{(a,b) \mid (a,b) \in M \times M \wedge a \sim b\}$ .
Umgekehrt definiert jede Teilmenge R von $M \times M$ eine Relation von M durch: $a \sim b \overset{def}{\Longleftrightarrow} (a,b) \in R$ .

Wir können also jede Relation durch eine Teilmenge R von $M \times M$ bestimmen.
R definiert daher genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn folgendes gilt:

1.) $(a,a) \in R$ für alle $a \in M$ (reflexiv)

2.) $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ (transitiv)

3.) $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ (symmetrisch)

Definition 5.3

Seien nun $\overset{a}{\sim}$ und $\overset{b}{\sim}$ Relationen auf M. $R_a$ und $R_b$ seien die durch $\overset{a}{\sim}$ und $\overset{b}{\sim}$ definierten Teilmengen von $M \times M$.

$$\overset{a}{\sim} = \overset{b}{\sim} \overset{def}{\Longleftrightarrow} R_a = R_b \ .$$

Satz 5.1

Sei M eine Menge.
Jede Klasseneinteilung $\{M_\alpha \mid \alpha \in J\}$ von M gibt folgendermaßen Anlaß zu einer Äquivalenzrelation:
Sei $a, b \in M$.
$a \sim b \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Es gibt $\alpha \in J$ mit $a \in M_\alpha$ und $b \in M_\alpha$ .

Beweis:

Wir zeigen, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist:

1.) Für jedes $a \in M$ gibt es $\alpha \in J$ mit $a \in M_\alpha$ ,
d.h. $a \sim a$ .

2.) Seien $a, b, c \in M$ und $a \sim b$ und $b \sim c$ .

$a \sim b \Longleftrightarrow$ Es gibt $\alpha \in J$ mit $a \in M_\alpha$ und $b \in M_\alpha$ .
$b \sim c \Longleftrightarrow$ Es gibt $\beta \in J$ mit $b \in M_\beta$ und $c \in M_\beta$ .
Aus $b \in M_\alpha$ und $b \in M_\beta$ folgt:

$M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$ .

Nach der Definition der Klasseneinteilung ist dann $\beta = \alpha$ .
Also gilt $a \sim c$ .

3.) Sei $a, b \in M$ und $a \sim b$ .
$a \sim b \Longleftrightarrow$ Es gibt $\alpha \in J$ mit $a \in M_\alpha$ und $b \in M_\alpha$ .
Daraus folgt nach der Definition von $\sim$ , daß auch $b \sim a$ ist.

Satz 5.2

Sei M eine Menge.
Jede Äquivalenzrelation $\sim$ gibt folgendermaßen Anlaß zu einer Klasseneinteilung von M:

$\mathfrak{J} := \{ A \mid A \subset M$ und es gibt ein $a \in M$ mit $A = \{ b \mid b \in M \wedge b \sim a \}$.

Dann ist $\{ A \mid A \in \mathfrak{J} \}$ eine Klasseneinteilung von M.

<u>Beweis</u>:

Nachweis der Eigenschaften einer Klasseneinteilung:

1.) $A \in \mathfrak{J} \Rightarrow$ Es gibt $a \in M$ derart, daß $A = \{ b \mid b \in M \wedge b \sim a \}$.
Wegen $a \sim a$ folgt $a \in A$.
Also gilt $A \neq \emptyset$.

2.) a) Nach Definition von $\mathfrak{J}$ gilt: $\bigcup_{A \in \mathfrak{J}} A \subset M$.

b) Sei $x \in M$. $x \sim x \Rightarrow x \in A := \{ y \mid y \in M \wedge y \sim x \}$.

Aus a) und b) folgt: $\bigcup_{A \in \mathfrak{J}} A = M$.

3.) Zum Beweis der dritten Eigenschaft einer Klasseneinteilung wird der folgende Hilfssatz benutzt.

<u>Hilfssatz</u>: $x \in A \wedge A \in \mathfrak{J} \Rightarrow A = \{ y \mid y \in M \wedge y \sim x \}$.
Der Beweis bleibe dem Leser überlassen. Er folgt unmittelbar aus der in 1.) und 2.) nicht benutzten Transitivität und Symmetrie der Äquivalemzrelation.

Sei nun $A \in \mathfrak{J}$, $B \in \mathfrak{J}$.
Zu zeigen: $A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
Wir zeigen die äquivalente Behauptung:
$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A = B$.
Sei $A \cap B \neq \emptyset$. Dann gibt es $x \in M$ mit $x \in A$ und $x \in B$.
Nach dem obigen Hilfssatz folgt sofort:
$A = B$.

<u>Bemerkung</u>: Die durch $\sim$ induzierte Klasseneinteilung induziert ihrerseits eine Relation $\sim'$.
Es gilt: $\sim \; = \; \sim'$.
Die durch eine Klasseneinteilung induzierte Relation induziert eine Klasseneinteilung, die gleich der vorausgesetzten Klasseneinteilung ist.

Man nennt die in Satz 5.2 beschriebene Klasseneinteilung "die durch $\sim$ induzierte Einteilung von M in <u>Äquivalenz</u>-klassen".

<u>Beispiel:</u> $M = \mathbb{Z}$

$a \sim b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a-b$ teilbar durch 5

Nachweis, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist:

1.) $a-a$ ist durch 5 teilbar,
also ist $\sim$ reflexiv.

2.) $a-b$ und $b-c$ sind durch 5 teilbar, folgt
$a-c = (a-b)+(b-c)$ ist durch 5 teilbar,
also ist $\sim$ transitiv.

3.) $a-b$ ist durch 5 teilbar, folgt $b-a$ ist
durch 5 teilbar,
also ist $\sim$ symmetrisch.

Die durch $\sim$ induzierte Klasseneinteilung sieht folgendermaßen aus:

$$M_0 = \{\ldots,-10,-5,0,5,10,\ldots\}$$
$$M_1 = \{\ldots,,-9,-4,1,6,11,\ldots\}$$
$$M_2 = \{\ldots,-8,-3,2,7,12,\ldots\}$$
$$M_3 = \{\ldots,-7,-2,3,8,13,\ldots\}$$
$$M_4 = \{\ldots,-6,-1,4,9,14,\ldots\}$$

Die Menge $\{M_i \mid i \in \{0,\ldots,4\}\}$ ist die durch $\sim$ induzierte Klasseneinteilung.

<u>Bemerkung</u>: Ist $x$ ein Element einer Äquivalenzklasse, so nennt man $x$ einen <u>Repräsentanten</u> der Klasse.

## § 6 Einführung des Vektorraumes

Wir bringen zunächst eine Motivierung der axiomatischen Definition eines Vektorraumes.

Sei E die Ebene der Elementargeometrie. Wir betrachten die Menge

$$E \times E \overset{def}{=} \{(A,B) \mid A \in E \wedge B \in E\} .$$

Sei $(A,B) \in E \times E, A \neq B$. Mit $g(A,B)$ bezeichnen wir die durch A und B gehende Gerade.

In der folgenden Definition soll eine Äquivalenzrelation in $E \times E$ eingeführt werden.

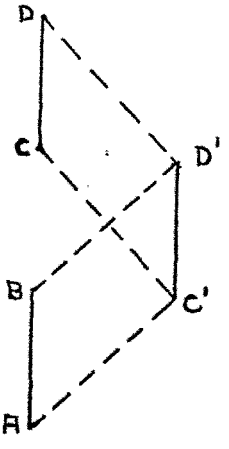
Definition 6.1

Sei $(A,B) \in E \times E$ und $(C,D) \in E \times E$. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

I) $A \neq B$ und $C \neq D$

$(A,B) \approx (C,D) \iff$ Es gibt $(C',D') \in E \times E$ mit $C' \neq D'$ und

1.) $g(C',D') \neq g(A,B)$
2.) $g(C',D') \neq g(C,D)$
3.) $g(C',D')$ parallel $g(A,B)$
4.) $g(C',D')$ parallel $g(C,D)$
5.) $g(A,C')$ parallel $g(B,D')$
6.) $g(C,C')$ parallel $g(D,D')$




II) $A = B$

$(A,B) \approx (C,D) \iff C = D$

III) $C = D$

$(A,B) \approx (C,D) \iff A = B$ .

Wir nennen (A,B,C,D) ein Parallelogramm, wenn $(A,B) \approx (C,D)$. Der Nachweis, daß $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist, bleibt dem Leser überlassen. Man führt den Nachweis auf ge-

wisse Eigenschaften von Parallelogrammen zurück (vergleiche: J. Schmidt, Analytische Geometrie I ). Die Definition unter I) wurde in dieser etwas umständlich erscheinenden Art und Weise gemacht, um auch ausgeartete Parallelogramme (A,B,C,D liegen auf einer Ebene) zu erfassen. Wie bereits früher ausgeführt, legen wir keinen Wert auf Vollständigkeit, da wir nur den Begriff des Vektorraumes motivieren wollen.

Die durch $\approx$ induzierten Äquivalenzklassen heißen Vektoren. Ist (A,B) Repräsentant einer solchen Klasse, so bezeichnet man die Klasse auch als $\overrightarrow{AB}$ . Der Pfeil soll ausdrücken, daß für $A \neq B$ gilt: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ . Die Menge aller Vektoren der Ebene E bezeichnen wir mit V.

Wir bringen im folgenden eine in der Geometrie häufig benutzte Definition von Vektoren, die sich auf die Begriffe Abstand bzw. Orientierung gründet.
In der Geometrie wird erklärt, wann zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleiche Länge haben; wir schreiben dann $d(A,B) = d(C,D)$ .

Seien $A,B \in E$, $A \neq B$. Die zu $\overline{AB}$ senkrechte Gerade durch A teilt E in zwei Halbebenen. Mit H(A,B) bezeichnen wir die Halbebene, in der B liegt.

<u>Definition 6.2</u>

Seien $A,B,C,D \in E$; $A \neq B$ , $C \neq D$ .
(A,B) und (C,D) heißen gleichorientiert $\Longleftrightarrow$
$H(A,B) \subset H(C,D)$ oder $H(C,D) \subset H(A,B)$ .

Wir benutzen nun die Begriffe Abstand und Orientierung, um in $E \times E$ eine Äquivalenzrelation $\approx$ einzuführen.

<u>Definition 6.3</u>

Seien $A,B,C,D \in E$. Wir unterscheiden drei Fälle:

I) Seien $A \neq B$ und $C \neq D$ .

$(A,B) \overset{b}{\sim} (C,D) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\alpha)$ $d(A,B) = d(C,D)$ und

$\beta)$ $(A,B)$ und $(C,D)$ sind gleich orientiert

II) $A=B$

$(A,B) \overset{b}{\sim} (C,D) \overset{def}{\Longleftrightarrow} C=D$

III) $C=D$

$(A,B) \overset{b}{\sim} (C,D) \overset{def}{\Longleftrightarrow} A=B$ .

<u>Satz 6.1</u>

$\overset{a}{\sim} = \overset{b}{\sim}$

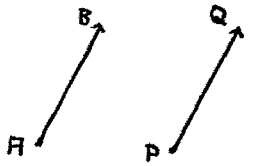
Der Beweis folgt aus den geometrischen Eigenschaften eines Prallelogramms und aus den Begriffen Länge und Orientierung.

Auf Grund dieses Satzes schreiben wir im folgenden statt $\overset{a}{\sim}$ und $\overset{b}{\sim}$ einfach $\sim$ .

Wir geben nun zwei Sätze an, deren Beweis uns ebenfalls zu sehr in die Geometrie führen würde.

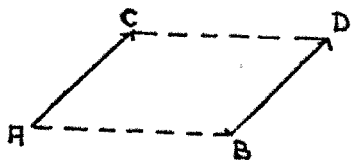
<u>Satz 6.2</u>

Sei $(A,B) \in E \times E$; $P \in E$.
Dann gibt es genau ein $Q \in E$ mit $(A,B) \sim (P,Q)$ .




<u>Satz 6.3</u>

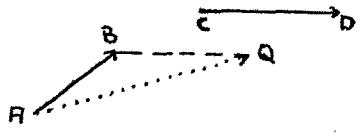
Seien $A,B,C,D \in E$.
$(A,B) \sim (C,D) \Rightarrow (A,C) \sim (B,D)$



Definition 6.4

Seien $v,w \in V$. Für v und w wählen wir Repräsentanten (A,B) bzw. (C,D). Sei Q der Punkt mit $(B,Q) \sim (C,D)$.

$v + w \overset{def}{=} \overrightarrow{AQ}$




Zum besseren Verständnis dieser Definition benutzen wir folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz

Seien $A,B,C,D,A',B',C',D' \in E$. Sei $(A,B) \sim (A',B')$, $(C,D) \sim (C',D')$. Sei Q' der Punkt mit $(B',Q') \sim (C',D')$. Sei Q der Punkt mit $(B,Q) \sim (C,D)$.

Dann gilt: $(A,Q) \sim (A',Q')$ .

Beweis:

$\alpha$) $(B,Q) \sim (C,D) \wedge (C,D) \sim (C',D') \Rightarrow (B,Q) \sim (C',D')$

$(B',Q') \sim (C',D') \Rightarrow (C',D') \sim (B',Q')$

$(B,Q) \sim (C',D') \wedge (C',D') \sim (B',Q') \Rightarrow \underline{(B,Q) \sim (B',Q')}$

$\beta$) $(A,B) \sim (A',B') \Rightarrow (A,A') \sim (B,B')$

$(B,Q) \sim (B',Q') \Rightarrow (B,B') \sim (Q,Q')$

$(A,A') \sim (B,B') \wedge (B,B') \sim (Q,Q') \Rightarrow (A,A') \sim (Q,Q')$

$(A,A') \sim (Q,Q') \Rightarrow \underline{(A,Q) \sim (A',Q')}$

(q.e.d.)

Der Hilfssatz zeigt, daß Definition 6.4 sinnvoll ist, d.h. die Definition ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten.

Satz 6.4

V mit der Operation + und dem neutralen Element $0 = \overrightarrow{AA}$ $(A \in E)$ ist ein kommutative Gruppe.

Beweis:

1.) Zum Nachweis des assoziativen Gesetzes genügt es zu zeigen, daß für alle $A,B,C,D \in E$ gilt:

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$ .

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ und

$\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ $\Longrightarrow$

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

2.) Seien $A,B,C \in E$, sei $Q \in E$ der Punkt mit $(A,Q) \sim (B,C)$ .

Dann gilt: $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BC}$

3.) Für alle $A,B \in E$ gilt:

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = 0$

Wir schreiben deshalb: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

4.) Zum Nachweis des kommutativen Gesetzes braucht man nur zu zeigen:

Für alle $A,B,C \in E$ gilt: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ .

Sei $Q$ der Punkt mit $(A,Q) \sim (B,C)$ .

Dann gilt: $(A,B) \sim (Q,C)$ .

$(A,B) \sim (Q,C) \wedge (B,C) \sim (A,Q) \Longrightarrow$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Durch Satz 4.2 haben wir für zwei Punkte $P_0, P_1 \in E$ mit $P_0 \neq P_1$ die Abbildung $f: \mathbb{R} \to g(P_0,P_1)$ eingeführt.
Wir bezeichnen diese Abbildung im folgenden mit $j_{P_0,P_1}$ .

Definition 6.5

Seien $A,B \in E$ , $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot \overrightarrow{AB} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \overrightarrow{AB} & \text{für } A=B \\ \overrightarrow{A\, j_{P_0,P_1}(\lambda)} & \text{für } A \neq B \end{cases}$$

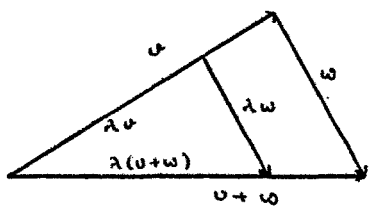
(Daß diese Definition sinnvoll ist, d.h. unabhängig vom

Repräsentanten, folgt aus den Eigenschaften der Abbildung f, auf die wir hier nicht näher eingehen können.)

Folgerungen aus den Eigenschaften von f sind ebenfalls die Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.) & (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v \\ 2.) & \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w \\ 3.) & \lambda(\mu v) = (\lambda\cdot\mu)v \\ 4.) & 1v = v \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{für alle } v,w \in V \\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\,.\end{array}$$

Die folgende Zeichnung illustriert das distributive Gesetz $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$. Der Leser mache sich daran die Beziehungen zum Strahlensatz klar.




<u>Definition 6.6</u>

Sei X eine Menge und K ein Körper.
X ist ein <u>Vektorraum</u> über K, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

a) In X ist eine Operation + definiert und ein Element $0 \in X$ ausgezeichnet. Außerdem ist eine skalare Multiplikation erklärt, das ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K\times K & \longrightarrow & X \\ (\lambda,a) & \longmapsto & \lambda a \end{array}$$

b) I) X ist bezüglich der Operation + eine abelsche Gruppe mit 0 als neutralem Element.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II)} & (\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a \\ & \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b \\ \text{III)} & (\lambda\cdot\mu)a = \lambda(\mu a) \\ \text{IV)} & 1a = a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{für alle } a,b \in X \\ \lambda,\mu \in K\end{array}$$

Wir notieren zunächst einige einfache Folgerungen aus dem Axiomensystem für einen Vektorraum.

Seien $a, b \in X$ und $\lambda, \mu \in K$ :

1.) $(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a$

2.) $\lambda(a-b) = \lambda a - \lambda b$

3.) $0a = 0 , \quad \lambda 0 = 0$

4.) $-a = (-1)a$

<u>Beweise</u>:

Zu 1.) (Einführung der Differenz: In einer additiven Gruppe gilt $a-b=c$ genau dann, wenn $a=c+b$ ist.)
Nach obiger Einführung der Differenz gilt:

$$(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a \Leftrightarrow (\lambda - \mu)a + \mu a = \lambda a \quad .$$

Es gilt aber:

$$(\lambda - \mu)a + \mu a = ((\lambda - \mu) + \mu)a = \lambda a \; .$$

Zu 2.) Es ist wieder zu zeigen: $\lambda(a-b) + \lambda b = \lambda a$ .

$$\lambda(a-b) + \lambda b = \lambda((a-b) + b) = \lambda a \quad .$$

Zu 3.) $0a = (0-0)a = 0a - 0a = 0$

$$\lambda 0 = \lambda(0-0) = \lambda 0 - \lambda 0 = 0 \quad .$$

Beachte: Die neutralen Elemente bzgl. der Addition in K und in X werden mit demselben Symbol 0 bezeichnet.

Zu 4.) Es ist zu zeigen: $a+(-1)a = 0$

$$a+(-1)a = 1a+(-1)a = (1+(-1))a = 0a = 0 \; .$$

Wir haben in Definition 1.7 (Seite 5) für jede additive Gruppe G eine Multiplikation der Elemente von $\mathbb{Z}$ mit denen von K und mit denen von X erklärt, und es gilt:

<u>Behauptung</u>: $n \in \mathbb{Z}$ , $a \in K$ und $1 \in K \Rightarrow (n \cdot 1)a = na$ .

<u>Beweis</u>:

Wir unterscheiden drei Fälle:

Satz 7.11

Ein Vektorraum X ist genau dann endlich-dimensional, wenn es $m \in \mathbb{N}$ gibt, derart daß je m Vektoren in X linear abhängig sind.

Beweis:

1.) Sei X endlich-dimensional.

$\alpha$) $\dim_K X = 0 \Rightarrow X = \{0\}$ . Also gilt der Satz für $\dim_K X = 0$ .

$\beta$) $\dim_K X = n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine Basis $\{a_1,\ldots,a_n\}$ von X. Setze $m=n+1$. Aus dem Steinitzschen Austauschsatz folgt, daß je m Vektoren linear abhängig sind.

2.) Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien je m Vektoren in X linear abhängig. Da jede nicht-leere Teilmenge der natürlichen Zahlen ein Kleinstes Element besitzt, gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß es $m_0-1$ Vektoren $b_1,\ldots,b_{m_0-1}$ gibt, die linear unabhängig sind.
$\{b_1,\ldots,b_{m_0-1}\}$ ist eine Basis von X, denn $b \in X \Rightarrow$
$b, b_1,\ldots,b_{m_0-1}$ linear abhängig, also
$b \in [b_1,\ldots,b_{m_0-1}]$ (Satz 7.7) .

Ergänzung:

Sei X endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann gilt:
$\dim_K X$ = Maximalzahl von linear unabhängigen Vektoren in X .

Satz 7.12

Ein Vektorraum X ist genau dann endlich-dimensional, wenn es endlich viele Vektoren $a_1,\ldots,a_n$ gibt mit $[a_1,\ldots,a_n] = X$ .

Beweis:

1.) Sei X ein endlich.dimensionaler Vektorraum. Dann besitzt X eine Basis.

2.) Seien $a_1,\dots,a_n \in X$ mit $[a_1,\dots,a_n] = X$ .
Beweis durch vollständige Induktion:

$\alpha$) $n = 1$

Fallunterscheidung:

a) Sei $a_1 \neq 0$ . Daraus folgt $\{a_1\}$ ist Basis von X .

b) Sei $a_1 = 0$ . Daraus folgt $X = \{0\}$, d.h. $\emptyset$ ist Basis von X.

$\beta$) Es ist zu zeigen: $[a_1,\dots,a_{k+1}]$ besitzt eine Basis.

Nach Induktionsannahme besitzt $[a_1,\dots,a_k]$ eine Basis M.

Fallunterscheidung:

a) $a_{k+1} \in [a_1,\dots,a_k]$ . Dann ist M Basis von $[a_1,\dots,a_{k+1}]$ .

b) $a_{k+1} \notin [a_1,\dots,a_k]$. Daraus folgt: $a_{k+1} \notin [M]$ .
Unter Beachtung von Satz 7.7 folgt daraus:
$M \cup \{a_{k+1}\}$ ist Basis von $[a_1,\dots,a_{k+1}]$ .
(Man beachte, daß der erwähnte Satz 7.7 auch für $M = \emptyset$ gilt.)

<u>Bemerkung</u>: Sei X ein Vektorraum über K und $a_1,\dots,a_n \in X$.
Dann gilt:
$\dim[a_1,\dots,a_n]$ = Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren aus $\{a_1,\dots,a_n\}$ .

<u>Beweis</u>:

Da beim 2.Teil des Beweises von Satz 7.12 die Induktionsannahme dahingehend verschärft werden kann, daß $M \subset \{a_1,\dots,a_n\}$ ist, gilt:

Es gibt eine Basis $B \subset \{a_1,\dots,a_n\}$ von $[a_1,\dots,a_n]$ .

**Sätzchen:** Sei X ein endlich-dimensionaler Vektorraum und U Unterraum von X. Dann gilt:

1.) U endlich-dimensional und $\dim_K U \leq \dim_K X$

2.) $\dim_K U = \dim_K X \iff U = X$ .

Der Beweis bleibe dem Leser als Übung überlassen. (Zu 1.) beachte Satz 7.11; zu 2.) den Steinitzschen Austauschsatz.)

## § 8 Lineare Abbildungen

**Definition 8.1**

Seien X und Y Vektorräume über K.
Eine Abbildung $\varphi: X \to Y$ heißt linear genau dann, wenn für alle $a, b \in X$ und $\lambda \in K$ gilt:

1.) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

2.) $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$ .

Beispiele für lineare Abbildungen:

1.) $0: \begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto 0 \end{array}$

2.) $id: \begin{array}{l} X \longrightarrow X \\ x \longmapsto x \end{array}$

Folgerungen:

1.) Seien $a_i \in X$ und $\lambda_i \in K$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ .
Dann gilt:

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(a_n) .$$

Beweis:

Der Beweis wird mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion geführt.
Für n=1 gilt die Aussage nach Definition der linearen Abbildung.
Angenommen, die Formel gelte für n=k .
Für n=k+1 ist

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{k+1} a_{k+1}) = \varphi(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k) + \lambda_{k+1} \varphi(a_{k+1})$$

wegen der Linearität von $\varphi$ .
Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \ldots + \lambda_k \varphi(a_k) .$$

2.) Es gilt: $\varphi(0) = 0$

Beweis:
$\varphi(0) = \varphi(0\cdot 0) = 0\cdot\varphi(0) = 0$

3.) Es gilt: $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ für alle $a \in X$ .

Beweis:
$\varphi(-a) = \varphi((-1)a) = (-1)\,\varphi(a) = -\varphi(a)$ .

4.) Es gilt: $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b)$ für alle $a,b \in X$ .

Beweis:
Es ist zu zeigen, daß $\varphi(a-b) + \varphi(b) = \varphi(a)$ ist .
Es gilt:
$\varphi(a-b) + \varphi(b) = \varphi(a-b+b) = \varphi(a)$ .

Satz 8.1

Seien X und Y Vektorräume über K. Sei $\{e_1,\dots,e_n\}$ eine Basis von X und $\{b_1,\dots,b_n\}$ eine Teilmenge von Y.
Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi: X \to Y$ mit $\varphi(e_i) = b_i$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ .

Beweis:

1.) Eindeutigkeit:
Seien $\varphi, \varphi'$ lineare Abbildungen mit $\varphi(e_i) = \varphi'(e_i) = (b_i)$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ .
Sei $a \in X \Longrightarrow a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ mit $\lambda_i \in K$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$.
Dann gilt: $\varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$
und $\varphi'(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi'(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ ,
d.h. für alle $a \in X$ gilt:
$\varphi(a) = \varphi'(a)$ .

2.) Existenz:
Sei $a \in X \Longrightarrow a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ .
$$\varphi(a) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$
Damit ist eine Abbildung $\varphi: X \to Y$ definiert, denn $\{e_1,\dots,e_n\}$ ist eine Basis von X .

Diese Abbildung erfüllt die geforderten Eigenschaften, denn

a) für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt:

$$\varphi(e_i) = b_i$$

und

b) $\varphi$ ist eine lineare Abbildung.

$$\begin{aligned}
\varphi(a+b) &= \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\Big) \\
&= \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) e_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i \\
&= \varphi(a) + \varphi(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\beta a) &= \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta \lambda_i e_i\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\beta \lambda_i) b_i \\
&= \beta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \\
&= \beta \varphi(a) \quad .
\end{aligned}$$

<u>Satz 8.2</u>

Seien X,Y und Z Vektorräume über K. $\varphi: X \to Y$ und $\psi: Y \to Z$ seien lineare Abbildungen.
Dann ist $\psi \circ \varphi: X \to Z$ eine lineare Abbildung.

<u>Beweis</u>:

1.) $$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)(a+b) &= \psi(\varphi(a+b)) = \psi(\varphi(a) + \varphi(b)) \\
&= \psi(\varphi(a)) + \psi(\varphi(b)) \\
&= (\psi \circ \varphi)(a) + (\psi \circ \varphi)(b)
\end{aligned}$$

2.) $$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)(\lambda a) &= \psi(\varphi(\lambda a)) = \psi(\lambda \varphi(a)) \\
&= \lambda \psi(\varphi(a)) = \lambda(\psi \circ \varphi)(a)
\end{aligned}$$

<u>Definition 8.2</u>

Seien X und Y Vektorräume über K.
Eine lineare Abbildung $\varphi: X \to Y$ heißt <u>Isomorphismus</u>, wenn

$\varphi$ bijektiv ist.
X und Y heißen <u>isomorph</u>, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : X \to Y$ gibt.

<u>Satz 8.3</u>

Für Vektorräume hat "isomorph" die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

(Warnung: Aus logischen Gründen ist es nicht möglich von der Menge aller Vektorräume zu sprechen. Wir gehen auf diese Problematik nicht näher ein.)

<u>Beweis</u>:

1.) Die Abbildung id: $\begin{array}{l} X \to X \\ x \mapsto x \end{array}$ ist ein Isomorphismus.

2.) Sei $\varphi : X \to Y$ ein Isomorphismus.
Wir zeigen:
$\varphi^{-1}: Y \to X$ ist ein Isomorphismus.
$\alpha$) $\varphi$ bijektiv $\Rightarrow \varphi^{-1}$ bijektiv
$\beta$) $\varphi^{-1}$ ist linear, denn

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(y_1+y_2) &= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(y_1)) + \varphi(\varphi^{-1}(y_2))) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2))) \\ &= \varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\lambda y) &= \varphi^{-1}(\lambda \varphi(\varphi^{-1}(y))) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(\lambda(\varphi^{-1}(y))) \\ &= \lambda \varphi^{-1}(y) \quad . \end{aligned}$$

3.) Seien $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ Isomorphismen.
Dann ist $\psi \circ \varphi : X \to Z$ ein Isomorphismus, denn $\psi \circ \varphi$ ist bijektiv und linear.

Im folgenden untersuchen wir, wie sich die Begriffe "Lineare Abhängigkeit", "Lineare Unabhängigkeit", "Basis", "Dimension"

und "Unterraum" bei linearen Abbildungen bzw. Isomorphismen verhalten. Dabei setzen wir stets voraus, daß X und Y Vektorräume über demselben Grundkörper K sind.

Satz 8.4

Sei $\varphi : X \to Y$ linear und $b_1,\dots,b_n \in X$ seien linear abhängig.
Dann gilt:
$\varphi(b_1),\dots,\varphi(b_n)$ sind linear abhängig.

Beweis:

Aus $b_1,\dots,b_n$ linear abhängig folgt, daß es eine Darstellung $\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_n b_n = 0$ mit $\lambda_i \neq 0$ für ein $i \in \{1,\dots,n\}$ gibt.
Aus $0 = \varphi(0) = \lambda_1\varphi(b_1)+\dots+\lambda_n\varphi(b_n)$ und $\lambda_i \neq 0$ für ein $i \in \{1,\dots,n\}$ folgt, daß $\varphi(b_1),\dots,\varphi(b_n)$ linear abhängig sind.

Satz 8.5

Sei $\varphi : X \to Y$ eine lineare injektive Abbildung.
Dann gilt:
$b_1,\dots,b_n \in X$ linear unabhängig $\Rightarrow \varphi(b_1),\dots,\varphi(b_n)$ linear unabhängig.

Beweis:

Es gilt: $\lambda_1\varphi(b_1)+\dots+\lambda_n\varphi(b_n) = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_n b_n) = 0.$
Da $\varphi(0)$ und $\varphi$ injektiv ist, folgt daraus:
$\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_n b_n = 0$ .
Aus $b_1,\dots,b_n$ linear unabhängig und $\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_n b_n = 0$ folgt:
$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Satz 8.6

Sei $\varphi: X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann gilt:
$\{a_1,\dots,a_n\}$ Basis von $X \Leftrightarrow \{\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_n)\}$ Basis von $Y$ .

Beweis:

Es genügt, nur eine Richtung zu beweisen, da $\varphi^{-1}: Y \to X$ ein Isomorphismus ist.
Sei $\{a_1,\dots,a_n\}$ Basis von X. Aus dem vorigen Satz folgt, daß $\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_n)$ linear unabhängig sind.

$y \in Y \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \in X$ .

$\varphi^{-1}(y) \in X \Rightarrow \varphi^{-1}(y) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$

$\varphi^{-1}(y) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \Rightarrow y = \varphi(\varphi^{-1}(y)) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_n \varphi(a_n)$

Folgerung: Durch Vorgabe eines Isomorphismus von $K^n$ in X ist eine Basis von X gegeben.

Sei $h: K^n \to X$ ein Isomorphismus. Dann lassen sich die Vektoren von X durch n-Tupel beschreiben $(x \mapsto h^{-1}(x))$.
Bei Vorgabe eines Isomorphismus von $K^n \to X$ spricht man von einer linearen Koordinatendarstellung der Vektoren von X .

Sei $\{a_1,\dots,a_n\}$ eine Basis von X. Dann ist die Abbildung
$h: K^n \to X$ ein Isomorphismus.
$(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mapsto \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$
Sei $x \in X$.
Dann gilt: $x = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n$ und $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ ist die durch h bestimmte Koordinatendarstellung von X.

Satz 8.7

Seien X,Y endlich dimensionale Vektorräume.
Dann gilt:

X und Y sind genau dann isomorph, wenn
$\dim_K X = \dim_K Y$
ist.

Beweis:

$\alpha$) Sei $\varphi : X \to Y$ Isomorphismus. Sei $\dim_K X = n > 0$ . Dann gibt es eine Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von X.
Aus dem vorherigen Satz (8.6) folgt, daß $\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\}$ eine Basis von Y ist.
Daraus folgt, daß $\dim_K X = \dim_K Y$ .

Sei $\dim_K X = 0$ , dann gilt $X = Y = \{0\}$ , d.h.
$\dim_K X = \dim_K Y = 0$ .

$\beta$) Sei $\dim_K X = \dim_K Y = n$ . Für n=0 ist die Aussage trivial.
Sei $n > 0$, dann gibt es Basen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von X und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von Y. Die durch $\varphi(a_i) = b_i$ für $i=1, \ldots, n$ definierte lineare Abbildung ist ein Isomorphismus von X auf Y.

Satz 8.8

Sei $\varphi : X \to Y$ ein Isomorphismus und U ein Unterraum von X, dann gilt:
$\varphi(U) := \{\varphi(x) \mid x \in U\}$ ist ein Unterraum von Y und die Räume U und $\varphi(U)$ sind isomorph.

Bemerkung: Auf Grund dieser Sätze kann man isomorphe Vektorräume bzgl. Aussagen über ihre lineare Struktur als gleich ansehen.

Aus Vektorräumen X, Y über K können wichtige neue Vektorräume konstruiert werden.

<u>Definition 8.3</u>

$L(X,Y) := \{ f \mid f : X \to Y \wedge f \text{ linear} \}$

Auf $L(X,Y)$ definieren wir eine Addition und eine skalare Multiplikation:

Seien $f_1, f_2 \in L(X,Y)$.
Die Abbildung $\begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto f_1(x) + f_2(x) \end{array}$ ist linear, denn

$$\begin{aligned} f_1(x+y) + f_2(x+y) &= f_1(x) + f_1(y) + f_2(x) + f_2(y) \\ &= (f_1(x) + f_2(x)) + (f_1(y) + f_2(y)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_1(\lambda x) + f_2(\lambda x) &= \lambda f_1(x) + \lambda f_2(x) \\ &= \lambda( f_1(x) + f_2(x)) \quad . \end{aligned}$$

Daher ist folgende Definition sinnvoll:

$$f_1 + f_2 : \begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto f_1(x) + f_2(x) \end{array}$$

Sei $y \in L(X,Y)$, $\lambda \in K$.
Die Abbildung $\begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{array}$ ist linear, denn

$$\lambda f(x+y) = \lambda( f(x) + f(y)) = \lambda f(x) + \lambda f(y)$$

und

$$\lambda f(\mu x) = \lambda(\mu f(x)) = (\lambda \mu) f(x) = \mu(\lambda f(x)) \quad . \qquad (*)$$

Daher ist folgende Definition sinnvoll:

$$(\lambda f) : \begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{array}$$

---

(*) Bemerkung: An dieser Stelle wird entscheidend die Kommutativität des Grundkörpers K benutzt !

Satz 8.9

L(X,Y) bildet mit diesen Operationen und der linearen Abbildung $0: \begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto 0 \end{array}$ als neutralem Element einen Vektorraum.

Beweis:

Zu $\varphi \in L(X,Y)$ ist $-\varphi : \begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto -\varphi(x) \end{array}$ inverses Element. Die Gültigkeit der Vektorraumaxiome von L(X,Y) folgt unmittelbar daraus, daß Y ein Vektorraum ist.

Beispiele: 1.) Wähle als Y den Grundkörper K.
$L(X,K) = \{\varphi \mid \varphi : X \longrightarrow K$ und $\varphi$ lineare Abbildung$\}$.
Die Elemente von L(X,K) heißen Linearformen.
Der Vektorraum $L(X,K) = X^*$ heißt der zu X duale Raum.

2.) Betrachte den Vektorraum L(K,X).
Das Einselement 1 von K bildet eine Basis von K.
Da $\varphi$ eine lineare Abbildung ist, gilt:
$\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1)$.
Die Zuordnung $\varphi \longmapsto \varphi(1)$ definiert einen Isomorphismus von L(K,X) auf X.

Ein besonderes Beispiel ist der Vektorraum L(X,X), da auf ihm noch eine Multiplikation erklärt werden kann, so daß L(X,X) mit diesen Operationen einen Ring bildet.
Dazu müssen einige Überlegungen angestellt werden:
Seien X,Y,Z Vektorräume über K. Dann folgt aus Satz 8.2, daß, mit $\varphi \in L(X,Y)$ und $\psi \in L(Y,Z)$ die Abbildung
$\psi \circ \varphi \in L(X,Z)$ ist.
Sei $\psi \in L(Y,Z)$ fest gewählt, dann definiert die Zuordnung:
$\varphi \longmapsto \psi \circ \varphi$ eine Abbildung von L(X,Y) nach L(X,Z).
Ebenso definiert für eine feste Abbildung $\varphi \in L(X,Y)$ die Zuordnung $\psi \to \psi \circ \varphi$ eine Abbildung von L(Y,Z) nach L(X,Z).

Satz 8.10

Die so definierten Abbildungen sind linear.

Beweis:

1.) Sei $\psi$ ein fest gewähltes Element aus $L(Y,Z)$.
Dann gilt für $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2 \in L(X,Y)$, $\lambda \in K$ und für alle $x \in X$:

$$(\psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2))(x) = \psi((\varphi_1 + \varphi_2)(x)) = \psi(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))$$
$$= (\psi \circ \varphi_1)(x) + (\psi \circ \varphi_2)(x)$$

$$(\psi \circ (\lambda \varphi))(x) = \psi((\lambda \varphi)(x)) = \psi(\lambda \varphi(x))$$
$$= \lambda \psi(\varphi(x)) = \lambda(\psi \circ \varphi)(x)$$

2.) Der Beweis, daß für ein festes $\varphi \in L(X,Y)$ die Abbildung $L(Y,Z) \longrightarrow L(X,Z)$, $\psi \longmapsto \psi \circ \varphi$ linear ist, wird entsprechend geführt.

Bemrkung: Die Abbildung $L(Y,Z) \times L(X,Y) \longrightarrow L(X,Z)$, $(\psi, \varphi) \longmapsto \psi \circ \varphi$ ist mithin linear in jeder Komponente. Eine solche Abbildung nennt man bilinear.

Bezeichnung: $L(X,X) = \{\varphi \mid \varphi : X \longrightarrow X$ und $\varphi$ lineare Abbildung$\}$ heißt der Vektorraum der Endomorphismen von X.

Auf $L(X,X)$ definieren wir folgendermaßen ein Produkt:
Seien $\varphi$, $\psi \in L(X,X)$.

$$\varphi\psi := \varphi \circ \psi$$

Nach Satz 8.10 gilt für alle $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$, $\psi_2 \in L(X,X)$:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)\psi_1 = \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_1$$

$$\varphi_1(\psi_1 + \psi_2) = \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2$$

Also ist $L(X,X)$ mit den erklärten Operationen ein Ring mit Einselement $\mathrm{id}: \begin{array}{l} X \longrightarrow X \\ x \longmapsto x \end{array}$ .

$L(X,X)$ heißt der <u>Endomorphismenring</u> von $X$ .

Beachte: Dieser Ring ist im allgemeinen nicht kommutativ.

## § 9 Matrizen

Definition 9.1

Ein rechteckiges System

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

von $m \cdot n$ Elementen eines Körpers K heißt Matrix von n Spalten und m Zeilen.

Sei

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{lk} \end{pmatrix}, \qquad l, k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt A=B genau dann, wenn k=n, l=m und $a_{ij} = b_{ij}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ ist.

Bezeichnung: A heißt m×n Matrix. Man schreibt $A = (a_{ij})$, $(1 \leq i \leq m), (1 \leq j \leq n)$. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen bezeichnet man mit $\mathfrak{M}(m,n)$.

Auf $\mathfrak{M}(m,n)$ definieren wir eine Addition und eine skalare Multiplikation:

Sei $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ $\quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

Sei $\lambda \in K$.

$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) \qquad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

$\mathfrak{M}(m,n)$ ist mit diesen Operationen und

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

als neutralem Element ein Vektorraum über K.

Die Elemente

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 000 & \vdots \\ \vdots & 010 & \vdots \\ \vdots & 000 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{j-te Spalte} \end{array}$$

bilden eine Basis von $\mathfrak{M}(m,n)$.
Es gilt: $\dim \mathfrak{M}(m,n) = n \cdot m$.
Daraus folgt: $\mathfrak{M}(m,n)$ und $K^{n \cdot m}$ sind isomorph.
Die Abbildung $F: \mathfrak{M}(m,n) \to K^{n \cdot m}$ mit

$$F((a_{ij})) := (a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{m1},\ldots,a_{mn})$$

ist ein Isomorphismus.
Die Elemente $e_i = (0,\ldots,1,\ldots 0)$ von $K^r$ $(1 \leq i \leq r)$ bilden eine Basis von $K^r$. (Beachte: Man bezeichnet diese Basisvektoren für alle $r \in \mathbb{N}$ mit $e_1,\ldots,e_r$. Es ist darauf zu achten, daß für $r_1 \neq r_2$ der Vektor $e_i$ als Element von $K^{r_1}$ und von $K^{r_2}$ betrachtet nicht dasselbe ist.)
Es gilt: f ist gerade die lineare Abbildung mit

$$f(d_{ij}) = e_{(i-1)\cdot n+j} \in K^{n \cdot m} \quad (1 \leq i \leq m),(1 \leq j \leq n),$$

Wir untersuchen im folgenden die Beziehungen zwischen $L(K^n,K^m)$ und $\mathfrak{M}(m,n)$.
Aus Satz 8.1 folgt, daß eine lineare Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$ eindeutig durch $\varphi(e_i) = b_i \in K^m$, $i=1\ldots n$ bestimmt ist. $b_i$ ist ein m-Tupel, das wir in "Spaltenform"

$$b_i := \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

schreiben wollen.
Das System

$$(b_1,\ldots,b_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist ein Element von $\mathfrak{M}(m,n)$.

<u>Satz 9.1</u>

Die Vektorräume $L(K^n,K^m)$ und $\mathfrak{M}(m,n)$ sind über K isomorph.

<u>Beweis:</u>

Die Abbildung $L(K^n,K^m) \to \mathfrak{M}(m,n)$, $\varphi \to (\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))$ ist ein Isomorphismus, denn

1.) Aus Satz 8.1 folgt, daß die linearen Abbildungen von $K^n \to K^m$ bijektiv den n-Tupeln von Elementen aus $K^m$ entsprechen.
Da andererseits die Menge der n-Tupel von Elementen aus $K^m$ bijektiv der Menge aller m×n-Matrizen entspricht, ist die oben definierte Abbildung bijektiv.

2.) Seien $\varphi_1,\varphi_2 \in L(K^n,K^m)$.

$$\varphi_1 + \varphi_2 \to (\varphi_1(e_1) + \varphi_2(e_1), \ldots, \varphi_1(e_n) + \varphi_2(e_n))$$
$$= (\varphi_1(e_1),\ldots,\varphi_1(e_n)) + (\varphi_2(e_1),\ldots,\varphi_2(e_n))$$

Sei $\varphi \in L(K^n,K^m)$ und $\lambda \in K$

$$\lambda\varphi \to ((\lambda\varphi)(e_1)\ldots(\lambda\varphi)(e_n)) =$$
$$= (\lambda\varphi(e_1)\ldots \lambda\varphi(e_n))$$
$$= \lambda(\varphi(e_1)\ldots\varphi(e_n)).$$

Also ist die Abbildung linear.

<u>Definition 9.2:</u>

Seien $l,m,n \in \mathbb{N}$.
Das Matrizenprodukt ist die Abbildung

$$\mathfrak{M}(m,n) \times \mathfrak{M}(n,l) \to \mathfrak{M}(m,l)$$
$$\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}, (b_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,l}}\right) \to (c_{ik})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ k=1,\ldots,l}}$$

mit $c_{ik} := \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}$ ist.

Mit $(a_{ij}) = A$, $(b_{jk}) = B$ und $(c_{ij}) = C$ schreibt man:
$A \cdot B = C$.

<u>Beispiel:</u> Sei m=l=1. Dann ist $A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ und

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} .$$

Nach Definition folgt dann:

$$A \cdot B = a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{1n} \in K = \mathfrak{M}(1,1).$$

Man kann in diesem Fall $A \cdot B$ als ein Produkt zwischen einer Zeile und einer Spalte auffassen.

<u>Merkregel:</u> Sei $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ und $B \in \mathfrak{M}(n,l)$ und $A \cdot B = C = (c_{ik})$ $(i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,l)$, dann ist $c_{ik}$ gleich dem Produkt der i-ten Zeile in $\mathfrak{M}(m,n)$ mit der k-ten Spalte in $\mathfrak{M}(n,l)$.

<u>Satz 9.2</u>

$\mathfrak{M}(n,n)$ bildet mit diesem Matrizenprodukt einen Ring.

Eine Motivierung für die Definition eines Produktes zwischen Matrizen gibt der folgende Satz.

<u>Satz 9.3</u>

Voraussetzung: Seien $\varphi \in L(K^n, K^m)$ mit der zugeordneten Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(m,n)$ und $\varphi \in L(K^m, K^l)$ mit der zugeordneten Matrix $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}(l,m)$.

Behauptung: Die dem Element $\psi \circ \varphi$ von $L(K^n, K^l)$ zugeordnete Matrix $C = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}(l,n)$ ist gleich $B \cdot A$.

<u>Beweis:</u>

Es gilt:

$$j \in \{1,\ldots,n\} \qquad \varphi(e_j) = \sum_{r=1}^{m} a_{rj} e_r$$

$$k \in \{1,\ldots,m\} \qquad \psi(e_k) = \sum_{s=1}^{l} b_{sk} e_s .$$

Dann gilt für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$

$$\psi\circ\varphi\ (e_j) = \sum_{r=1}^{m} a_{rj}\,\psi(e_r) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{l} a_{rj}b_{sr}e_s\ .$$

Da die Elemente $e_1,\dots,e_l$ eine Basis von $K^l$ bilden, folgt aus

$$\psi\circ\varphi\ (e_j) = \sum_{s=1}^{l} c_{sj}e_s \qquad \text{und}$$

$$\psi\circ\varphi\ (ej) = \sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{m} b_{sr}a_{rj}e_s\ : \qquad \begin{array}{l} r=1,\dots,m \\ s=1,\dots,l \\ j=1,\dots,n \end{array}$$

$$c_{sj} = b_{sr}a_{sj}$$

Sei $z\in K^n$. Dann läßt sich z als Element von $\mathfrak{M}(n,1)$ auffassen. Das z zugeordnete Element von $L(K,K^n)$ bezeichnen wir ebenfalls mit z. Es ist gleich der linearen Abbildung, die der kanonische Isomorphismus $K^n \to L(K,K^n)$ dem Vektor z zuordnet.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[rr] \arrow[dr] & & (n,1) \arrow[dl] \\ & L(K,K^n) & \end{tikzcd}$$

Sei $\varphi\in L(K^n,K^m)$ und A die $\varphi$ zugeordnete Matrix. Dann gilt:

$$y = \varphi(x) \qquad\qquad y = \varphi\circ x$$

$$y = \varphi\circ x \qquad\qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Also gilt: $y_i = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}x_r$ für alle $i\in\{1,\dots,m\}$ .

<u>Definition 9.3</u>

1.) Seien A,B Gruppen. Dann heißt die Abbildung $\varphi : A\to B$ ein Gruppenisomorphismus, wenn $\varphi$ bijektiv ist und für alle $a,b\in A$ gilt:

$$\varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

Folgerung: a) $\varphi(1) = 1$
b) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

2.) Seien $R_1, R_2$ Ringe. Eine Abbildung $\varphi: R_1 \to R_2$ heißt Ringisomorphismus, wenn $\varphi$ bijektiv ist und für alle $a,b \in R_1$ gilt:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$
$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

Folgerung: a) $\varphi(0) = 0$

$$\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

<u>Folgerung:</u> Der definierte Isomorphismus $L(K^n, K^m) \longrightarrow \mathfrak{M}(n,n)$ ist ein Ringisomorphismus.

<u>Eigenschaften des Matrizenringes:</u>

1.) Der Matrizenring $\mathfrak{M}(n,n)$ hat für $n \geq 2$ Nullteiler, das heißt: es gibt $A,B \in \mathfrak{M}(n,n)$ mit $A,B \neq 0$ und $A \cdot B = 0$.

<u>Beweis:</u> Wähle

$$A = \begin{pmatrix} 100 & \cdots & 0 \\ 000 & & \vdots \\ 000 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 000 & \cdots & 0 \\ 010 & & \vdots \\ 000 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt: $A \cdot B = 0$

2.) Der Matrizenring $\mathfrak{M}(n,n)$ über einem Körper K, in dem $-1 \neq 1$, ist für $n \geq 2$ nicht kommutativ.

<u>Beweis:</u> Setze

$$A = \begin{pmatrix} 100 & \cdots & 0 \\ 0{-}10 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

dann gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0{-}1 & 0 & \cdots & 0 \\ -10 & 0 & & \vdots \\ 0 & & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 010 & \cdots & 0 \\ 10 & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Übung:</u> Sei K der Körper, der nur aus 2 Elementen besteht. Gilt dann die Aussage 2.) noch?

<u>Folgerung:</u> $L(X,X)$ ist nicht kommutativ für $\dim_K X \geq 2$ und $-1 \neq 1$ in K.

Wir betrachten die Untermenge $GL(X) = \{\varphi / \varphi \in L(X,X) \wedge \varphi \text{ bijektiv}\}$ von $L(X,X)$.

<u>Satz 9.4</u>

$GL(X)$ ist eine multiplikative Untergruppe von $S_X$ (vgl. Definitionen 1.8, 3.1 und Satz 3.2).

<u>Beispiel:</u> Sei K ein Körper. Dann gilt:
$GL(K) \cong K - \{0\} = K^*$ (Das Zeichen $\cong$ symbolisiert "isomorph".)

## § 10 Lineare Gleichungssysteme

**Definition 10.1**

Seien M,N Mengen, sei $f:M \to N$ eine Abbildung und $y \in N$.
$f^{-1}(y) := \{x \mid x \in M \wedge f(x) = y\}$

**Definition 10.2**

Sei $\varphi:X \to Y$ eine lineare Abbildung der Vektorräume X und Y über K.
Die Menge $\varphi^{-1}(0) = \{x \mid x \in M \wedge \varphi(x) = 0\}$ heißt Kern der linearen Abbildung $\varphi$.
Schreibweise: $\text{Kern}\varphi := \varphi^{-1}(0)$

**Satz 10.1**

$\text{Kern}\varphi$ ist ein Unterraum von X.
Beweis:

1.) $\text{Kern}\varphi \neq \emptyset$, da $\varphi(0) = 0$
2.) Seien $x,y \in \text{Kern}\varphi$ und $\lambda \in K$, dann gilt:
$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0+0 = 0$ und
$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda 0 = 0$

**Definition 10.3**

$\text{Bild}\varphi := \varphi(X) = \{y \mid y \in Y \wedge \bigvee_{x \in X} \varphi(x) = y\}$

**Satz 10.2**

$\text{Bild}\varphi$ ist ein Unterraum von Y.
Beweis:

1.) $\text{Bild}\varphi \neq \emptyset$, da $0 = \varphi(0)$
2.) Seien $x,y \in \text{Bild}\varphi$ und $\lambda \in K$, dann gilt:
$\bigvee_{x',y' \in X} \varphi(x') = x \quad (y') = y$. Damit folgt:
$\varphi(x'+y') = x+y$ und $\varphi(\lambda x') = \lambda x$.

Sei Y endlich dimensional und $\varphi: X \to Y$ eine lineare Abbildung der Vektorräume X und Y über K.

Definition 10.4

$\dim_K \text{Bild}\,\varphi = \dim_K \varphi(X) := \text{rg}\,\varphi$ ($\text{rg}\,\varphi$ = Rang der Abbildung $\varphi$ ).

Beachte: Die Definition ist sinnvoll, da Bild$\varphi$ ein endlich dimensionaler Unterraum von X ist.

Wir betrachten nun die folgende Situation:
Sei $\varphi: Y \to Y$ eine lineare Abbildung der Vektorräume X und Y über K. Sei $b \in Y$.
Eine grundlegende Aufgabe in der linearen Algebra ist es, die Menge $\varphi^{-1}(b) = \{x \mid x \in X \wedge \varphi(x) = b\}$ zu bestimmen.

Satz 10.3

$\varphi^{-1}(b)$ ist ein Unterraum von X genau dann, wenn $b = 0$.

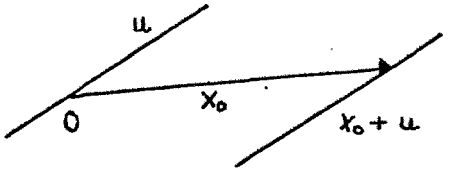
Beweis:

1.) Sei $b = 0$, dann gilt: $\varphi^{-1}(b) = \text{Kern}\,\varphi$.
2.) Sei $\varphi^{-1}(b)$ ein Unterraum von X, dann gilt:
$0 \in \varphi^{-1}(b)$. Da $\varphi(0) = 0$, folgt $b = 0$.

Definition 10.5

Sei U ein Unterraum des Vektorraumes X über K und $x \in X$.
$x + U := \{x+u \mid u \in U\}$ heißt lineare Mannigfaltigkeit.

Beispiel: Sei X die Ebene und U eine Gerade durch den Nullpunkt. Dann ist $x_0 + U$ eine zu U parallele Gerade durch den Endpunkt von $x_0$.



<u>Satz 10.4</u>

Sei $\varphi^{-1}(b) \neq 0$ und $x_0 \in \varphi^{-1}(b)$. Dann gilt: $\varphi^{-1}(b) = x_0 + \mathrm{Kern}\varphi$ .

<u>Beweis:</u>

Sei $x \in X$ und $\varphi(x) = b \Rightarrow \varphi(x-x_0) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = 0$.
$\varphi(x-x_0) = 0 \Rightarrow x-x_0 \in \mathrm{Kern}\varphi$ .
$x-x_0 \in \mathrm{Kern}\varphi \Rightarrow x \in x_0 + \mathrm{Kern}\varphi$ .

Sei $x \in x_0 + \mathrm{Kern}\varphi \Rightarrow x = x_0 + z$ mit $z \in \mathrm{Kern}\varphi$ .
$x = x_0 + z$ und $z \in \mathrm{Kern}\varphi \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi(z) = \varphi(x_0) = b$.
Also gilt: $\varphi^{-1}(b) = x_0 + \mathrm{Kern}\varphi$ .

<u>Satz 10.5</u>

Es gilt: $\varphi$ injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}\varphi = \{0\}$.

<u>Beweis:</u>

Sei $\varphi$ injektiv. Dann gilt: $\mathrm{Kern}\varphi = \{0\}$.
Sei $\mathrm{Kern}\varphi = \{0\}$ . Es ist zu zeigen: $\bigwedge_{a,b \in X} \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$.
$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a-b) = 0$.
$\varphi(a-b) = 0$ und $\mathrm{Kern}\varphi = \{0\} \Rightarrow a = b$ .

Die bisherigen Sätze beinhalten die Grundeigenschaften von linearen Gleichungssystemen. Im folgenden sollen diese Ergebnisse konkretisiert werden:

Sei $X = K^n$ und $Y = K^m$, $\varphi: K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung mit der zugeordneten Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(m,n)$.
Sei

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in K^m .$$

Dann ist die Bestimmung von $\varphi^{-1}(y)$ äquivalent zur Auflösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Wir können deshalb alle vorigen Überlegungen auf das Problem der Auflösung von linearen Gleichungssystemen anwenden.

Sei $\varphi^{-1}(y) = \emptyset$. Dann ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Sei $\varphi(y) \neq \emptyset$. Ein $x \in K^n$ mit $\varphi(x) = y$ heißt spezielle Lösung. Da die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\varphi(x) = y$ durch die Angabe einer speziellen Lösung und die Bestimmung von Kern$\varphi$ gegeben ist (Satz 10.4), ist die Auflösung des Gleichungssystems $\varphi(x) = 0$ von besonderem Interesse. Man bezeichnet ein System $\varphi(x) = 0$ als <u>homogenes Gleichungssystem</u> und ein System $\varphi(x) = y$ mit $y \neq 0$ als <u>inhomogenes Gleichungssystem</u>. Im folgenden geben wir eine Methode an, wie man die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

bestimmen kann.

Wir schreiben das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise:

$$\left( \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \right) = G$$

Die Lösungsmethode für dieses System gründet sich auf die folgenden vier "erlaubten" Operationen:

1.) Bei Vertauschung von Zeilen der Matrix G ändert sich die Lösungsmenge nicht.

2.) Bei Multiplikation einer Zeile von G mit $\lambda \in K - \{0\}$ ändert sich die Lösungsmenge nicht.

3.) Bei Addition des $\lambda$-fachen einer Zeile von G zu einer anderen ändert sich die Lösungsmenge nicht.

4.) Bei Vertauschen von Spalten einer Matrix A mit Hilfe einer Permutation $\pi \in S_{\{1,\dots,n\}}$ erhalten wir das System:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1\,(1)} & \cdots & a_{1\,(n)} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m\,(1)} & \cdots & a_{m\,(n)} & b_m \end{array}\right) := G\,.$$

Dann gilt: $(x_1, \dots, x_n)$ ist ganau dann eine Lösung von G, wenn $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ Lösung von $G_\pi$ ist.

<u>Satz 10.6</u>

Durch Anwendung der Eigenschaften 1.), 3.), 4.) kann G umgeformt werden in:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|c} a'_{11} & \cdots & \cdots & a'_{1r} & a'_{1\,r+1} & \cdots & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2\,r+1} & \cdots & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & a'_{rr} & a'_{r\,r+1} & \cdots & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right) = L$$

mit $r \leq \min(m,n)$ und $a'_{11} \neq 0, \dots, a'_{rr} \neq 0$ .

<u>Beweis:</u>

umseitig

Wir führen den Beweis, indem wir schrittweise die Spalten auf die gewünschte Form bringen:

I) Fallunterscheidung:

1.) $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = 0.$

Dann ist die Behauptung trivial und es gilt: $r = 0$.

2.) $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \neq 0.$

Sei $a_{kl} \neq 0$ ($k \in \{1,\dots,m\}$; $l \in \{1,\dots,n\}$).
Durch Spaltenvertauschung bringen wir $a_{kl}$ in die erste Spalte und durch Zeilenvertauschung in die erste Zeile. Wir bezeichnen das dadurch erhaltene System hier (wie bei den folgenden erlaubten Operationen) wieder mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Für alle $l \in \{2,\dots,m\}$ addieren wir zur l-ten Zeile das $(-a_{l1}/a_{11})$-fache der 1. Zeile und erhalten ein System, dessen erste Spalte gleich

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist.

II) Es sei nun das System durch Anwendung der Operationen 1.), 3.), 4.) auf folgende Form gebracht:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c} a_{11} & \cdots\cdots & & a_{1p} & a_{1\,p+1} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{2\,p+1} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & a_{pp} & a_{p\,p+1} & \cdots\cdots & a_{pn} & b_p \\ \vdots & & & \vdots & a_{p+1\,p+1} & \cdots\cdots & a_{p+1\,n} & b_{p+1} \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{m\,p+1} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Fallunterscheidung:

1.) $p = \min(m,n)$ oder

$$\begin{pmatrix} a_{p+1\ p+1} & \cdots & a_{p+1\ n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\ p+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = 0$$

In diesen Fällen ist die Aussage bewiesen.

2.) $p < \min(m,n)$ und

$$\begin{pmatrix} a_{p+1\ p+1} & \cdots & a_{p+1\ n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\ p+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \neq 0$$

Wir wenden I) 2.) auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{p+1\ p+1} & \cdots & a_{p+1\ n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\ p+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

an.

Es ist zu beachten, daß die erforderlichen Operationen in dem gesamten System gemacht werden müssen. Da aber diese Operationen die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & a_{pp} \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

nicht ändern, erhalten wir folgendes System:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1\ p+1} & a_{1\ p+2} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} \cdots & a_{2\ p+1} & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & a_{p+1\ p+1} & a_{p+1\ p+2} & \cdots & a_{p+1\ n} & b_{p+1} \\ \hline 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{p+2\ p+2} & \cdots & a_{p+2\ n} & b_{p+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{n\ p+2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Da nach höchstens $l = \min(m,n)$ Schritten der Fall 1.) auftritt, ist somit die Aussage bewiesen.

<u>Bemerkung:</u> Durch weitere Umformungen mit den Operationen 2.) und 3.) kann man folgendes System erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & c_{1\,r+1} & \dots & c_{1\,n} & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{r\,r+1} & \dots & c_{r\,n} & d_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_m \end{pmatrix}$$

<u>Beweis:</u>

Wir gehen vom System in Satz 10.6 aus. Für $k=r,r-1,r-2,\dots$ $\dots,2$ (Beachte die Reihenfolge!) addieren wir zur l-ten Zeile ($1 \leq l \leq k-1$) das $(a'_{lk}/a_{kk})$-fache der k-ten Zeile und erhalten folgendes System:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & a_{1\,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & & a_{rr} & a_{r\,r+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{pmatrix}$$

Durch Multiplikation der k-ten Zeile mit $1/a_{kk}$ für alle $k \in \{1,\dots,r\}$ erhält man das gewünschte Resultat.

<u>Satz 10.7</u>

Ein lineares Gleichungssystem $A'x = b'$ ist genau dann lösbar, wenn die Elemente $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ gleich Null sind.

<u>Beweis:</u>

1.) Gibt es ein $x = (x_1,\dots,x_n)$ mit $A'x = b'$, so folgt:

$$\begin{aligned} 0\,x_1 + \dots + 0\,x_n &= b'_{r+1} \\ &\vdots \\ 0\,x_1 + \dots + 0\,x_n &= b'_m \end{aligned}$$

Also gilt: $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$

2.) Es sei $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$.
Für das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a'_{1r}x_r & = & b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a'_{2r}x_r & = & b'_2 \\ a'_{33}x_3 \ldots\ldots + a'_{3r}x_r & = & b'_3 \\ \ddots \qquad \vdots & & \vdots \\ + a'_{rr}x_r & = & b'_r \end{array}$$

erhält man eine eindeutig bestimmte Lösung $(x_1, \ldots, x_r)$, indem man nacheinander $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$ ausrechnet. Dann ist $(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ eine spezielle Lösung von $A' \cdot x = b'$.

<u>Satz 10.8</u>

Sei $\varphi$ die der Matrix $A = (a_{ij})$ zugeordnete lineare Abbildung von $K^n \longrightarrow K^m$. Dann gilt: $\dim_K \mathrm{Kern}\varphi = n-r$.

<u>Beweis:</u>

Sei das Gleichungssystem $A' \cdot x = 0$ aus dem System $A \cdot x = 0$ durch Operationen der Form 1.) - 4.) hervorgegangen. Bei den Operationen 1.) - 3.) ändert sich die Lösungsmenge nicht und bei einer Spaltenvertauschung 4.) sind die Lösungsräume isomorph.
Da man das System

| | | |
|---|---|---|
| E | C | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

durch Anwendung der vier erlaubten Operationen aus dem System

| | |
|---|---|
| A | 0 |

erhält, ist Kern$\varphi$ isomorph zur Menge

$$M = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Die Abbildung $h: K^{n-r} \to M$, die definiert ist durch:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} := -C \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix}$$

ist ein Isomorphismus. Also gilt:

$$\dim_K \mathrm{Kern}\,\varphi = \dim_K M = n - r .$$

<u>Definition 10.6</u>

Die Maximalzahl von linear unabhängigen Spalten der Matrix $A = (a_{ij})$ heißt <u>Spaltenrang</u> von A.

Es gilt: $\mathrm{Rang}\,\varphi$ = Spaltenrang von A, denn $\varphi(e_j)$ ist die j-te Spalte von A und $\mathrm{Bild}\,\varphi = \varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$ .
Bei dieser Aussage wurde die Bemerkung unmittelbar nach Satz 7.12 benutzt.

<u>Satz 10.9</u>

$\dim_K \mathrm{Bild}\,\varphi = r$

<u>Beweis:</u>

Da $\dim_K \mathrm{Bild}\,\varphi$ = Spaltenrang A ist, genügt es zu beweisen: Der Spaltenrang einer Matrix ändert sich durch erlaubte Operationen nicht und es gilt:

$$\text{Spaltenrang von } \begin{array}{|c|c|} \hline E & C \\ \hline O & O \\ \hline \end{array} = r.$$

Die zweite Aussage ist klar.
Zum Beweis der ersten Aussage überlegt man sich folgendes:
Sei die Matrix A' aus der Matrix A durch eine erlaubte Operation hervorgegangen. Dann ist der von den Spalten von A aufgespannte Unterraum isomorph zu dem von den Spalten von A' aufgespannten Unterraum. Also gilt:
Spaltenrang A = Spaltenrang A' .

Definition 10.7

Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix $A = (a_{ij})$ heißt Zeilenrang von A.

Bemerkung: Seien $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_m = (a_{m1}, \dots a_{mn}$ die m Zeilen von A, dann gilt: Zeilenrang $A = \dim[a_1, \dots, a_m]$.

Satz 10.1o

Sei A eine $m \times n$-Matrix, dann gilt:
Zeilenrang von A = Spaltenrang von A

Beweis:

1.) Bei den erlaubten Operationen bleit der Zeilenrang unverändert.

2.) Da außerdem der Zeilenrang von

$$\begin{array}{|c|c|}\hline E & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} = r$$

ist, gilt: Spaltenrang von A = Zeilenrang von A.

Beispiel für die Berechnung eines linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 11x_4 &= -3 \\ 4x_1 + 12x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 14x_4 &= -12 \end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -2 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & -8 \\ 2 & 6 & 2 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Die erweiterte Matrix hat folgende Form:

1.)

1.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | -4 | 3 | 9 |
| 3 | 9 | -2 | -11 | -3 |
| 4 | 12 | -6 | -8 | 6 |
| 2 | 6 | 2 | -14 | -12 |

2.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | -4 | 3 | 9 |
| 0 | 0 | 10 | -20 | -30 |
| 0 | 0 | 10 | -20 | -30 |
| 0 | 0 | 10 | -20 | -30 |

Addition des 3-fachen der 1. Zeile zur 2. Zeile, des 4-fachen der 1. Zeile zur 3. Zeile und des 2-fachen der 1. Zeile zur 4. Zeile.

3.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -4 | 3 | 3 | 9 |
| 0 | 10 | 0 | -20 | -30 |
| 0 | 10 | 0 | -20 | -30 |
| 0 | 10 | 0 | -20 | -30 |

Vertauschnung der 2. Spalte mit der 3. Spalte.

4.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -4 | 3 | 3 | 9 |
| 0 | 10 | 0 | -20 | -30 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Addition des 1-fachen der 2. Zeile zur 3. und zur 4. Zeile.

5.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | -5 | -3 |
| 0 | 1 | 0 | -2 | -3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Addition des (-4)/10 -fachen der 2. Zeile zur 3. und Division der 2. Zeile durch 10.

Nach Satz 10.7 ist das System lösbar. Lösung des Systems 5.) sind alle Vektoren

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

mit $y_2 = 2y_4 - 3$ und $y_1 = -3y_3 + 5y_4 - 3$ .

Dann ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -2 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & -8 \\ 2 & 6 & 2 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Lösung des Systems 5.) ist.
(Man beachte die Vertauschung der 2. und 3. Spalte bei 3.))

Mit Hilfe dieser Lösungsmenge und einer speziellen Lösung kann man die Lösungsmenge des homogenen Systems beschreiben. Indem wir $x_2 = x_4 = 0$ setzen, erhalten wir eine spezielle Lösung $x_0$

$$x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Also ist die Lösungsmenge des homogenen Systems =

$$\left\{ x \;\middle|\; x \in K^4 \text{ und } \bigvee_{c_1, c_2 \in K} x = \begin{pmatrix} 3c_1 + 5c_2 \\ c_1 \\ 2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Dieser Unterraum ist isomorph zum $K^2$, wobei der Isomorphismus dem 2-Tupel $(c_1, c_2)$ das 4-Tupel $(-3c_1+5c_2, c_1, 2c_2, c_2)$ zuordnet (vgl. den Beweis zu Satz 1o.8).

<u>Definition 10.8</u>

$A \in \mathfrak{M}(n,n)$ heißt <u>invertierbar (regulär)</u> genau dann, wenn die A zugeordnete lineare Abbildung Element von $GL(K^n)$ ist.

Im Folgenden werden A und $\varphi$ häufig identifiziert. Deshalb kann man, wenn man A als Abbildung auffaßt, sagen:
A ist invertierbar (regulär) genau dann, wenn A bijektiv ist.

Satz 10.11

Sei $A \in \mathfrak{M}(n,n)$.

1.) A regulär $\Longleftrightarrow \bigvee_{B \in \mathfrak{M}(n,n)} A \cdot B = B \cdot A = E$
2.) A regulär $\Longleftrightarrow \bigvee_{B \in \mathfrak{M}(n,n)} A \cdot B = E$
3.) A regulär $\Longleftrightarrow \bigvee_{B \in \mathfrak{M}(n,n)} B \cdot A = E$
4.) A regulär $\Longleftrightarrow$ Rang $A = n$

Beweis

zu 2.) A regulär $\Rightarrow \bigvee_{B \in \mathfrak{M}} A \cdot B = E$ (nach 1.)).

$A \cdot B = E$. Bemerkung: Seien M und N Mengen, $F: M \to N$, $G: N \to M$ Abbildungen und $F \cdot G = Id_N$. Dann gilt: F ist surjektiv und G ist injektiv.
Aus dieser Bemerkung folgt, daß B injektiv ist.
Also gilt mit Satz 8.5:
dim Bild B = dim $K^n$ = n.
dim Bild B = dim $K^n$ und Bild B $\subseteq K^n$
Bild B = $K^n$. Also ist B bijektiv.
Aus B bijektiv und $A \cdot B = E$ folgt: A ist bijektiv.

zu 4.) A regulär $\Rightarrow$ Rang A = n (klar!)

Rang A = n. Dann gilt: A ist surjektiv.
Rang A = n $\Rightarrow$ dim Kern A = 0. Daraus folgt: A ist injektiv.

Sei K ein Körper mit p Elementen. Wir untersuchen die Anzahl der regulären $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K.

Satz 10.12

$$\# GL(K^n) = (p^n - 1)(p^n - 2) \ldots\ldots (p^n - p^{n-1}) = p^{n(n-1)/2}(p-1)(p^2-1)\ldots\ldots(p^n-1).$$

(Bemerkung: Sei M eine endliche Menge, dann wird definiert:
$\# M :=$ Anzahl der Elemente von M.)

Beweis:

Wir untersuchen, wieviele Möglichkeiten es gibt, k linear unabhängige Vektoren in $K^n$ auszuwählen ($1 \leq k \leq n$).

Für $k = 1$ ist jeder vom Nullvektor verschiedene Vektor in $K^n$ linear unabhängig. Also gibt es $(p^n-1)$ Möglichkeiten, einen linear unabhängigen Vektor in $K^n$ auszuwählen (Man beachte: $K^n = p^n$).

Induktionsvoraussetzung: Für $k = s$ gibt es $(p^n-1)(p^n-p)\ldots\ldots(p^n-p^{s-1})$ Möglichkeiten, s linear unabhängige Vektoren aus $K^n$ auszuwählen.
Seien die Vektoren $a_1,\ldots,a_s \in K^n$ linear unabhängig. Dann sind die Vektoren $a_1,\ldots,a_s,b \in K^n$ genau dann linear unabhängig, wenn $b \notin \{a_1,\ldots,a_s\}$ ist. Es gibt in $K^n - \{a_1,\ldots,a_s\}$ $(p^n-p^s)$ Vektoren. Also ist die Anzahl der Möglichkeiten, $(s+1)$ linear unabhängige Vektoren aus $K^n$ auszuwählen, gleich $(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\ldots\ldots(p^n-p^s)$.
Da die Anzahl der Elemente von $GL(K^n)$ gleich der Anzahl der n-tupel von linear unabhängigen Vektoren aus $K^n$ ist, gilt die Behauptung.

<u>Bemerkung:</u> $\#\{f \mid f:K^n \to K^n \wedge f \text{ bijektiv} \wedge F(0) = 0\} = (p^n-1)!$, wobei $\# K = p$ ist. Deshalb ist für $\#K = 2$ eine bijektive lineare Abbildung $f:K^2 \to K^2$ linear genau dann, wenn $f(0) = 0$ ist.

<u>Folgerung:</u> Aus Satz 10.11 folgt: A ist regulär genau dann, wenn die n Gleichungssysteme

$$A \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i-te Stelle}$$

für $i=1,\ldots,n$ lösbar sind.
Also ist die Bestimmung der inversen Matrix äquivalent zur Auflösung der obigen n Gleichungssysteme. Die inverse Matrix ist gleich

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Beipiel:** Untersuchung, ob die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ regulär ist und eventuell Bestimmung der inversen Matrix $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.) | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | | |
| | 3 | 1 | -3 | 0 | 1 | 0 | | |
| | 1 | 2 | -2 | 0 | 0 | 1 | | |
| 2.) | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | Addition des 3-fachen der 1. Zeile zur 2. Zeile und des 1-fachen der 1. Zeile zur 3. Zeile | |
| | 0 | 1 | 0 | -3 | 1 | 0 | | |
| | 0 | 2 | -1 | -1 | 0 | 1 | | |
| 3.) | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | Addition des 2-fachen der 2. Zeile zur 3. Zeile | |
| | 0 | 1 | 0 | -3 | 1 | 0 | | |
| | 0 | 0 | -1 | 5 | -2 | 1 | | |
| 4.) | 1 | 0 | 0 | -4 | 2 | -1 | Addition des 1-fachen der 3. Zeile zur 1. Zeile und Multiplikation der 3. Zeile mit (-1). | |
| | 0 | 1 | 0 | -3 | 1 | 0 | | |
| | 0 | 0 | 1 | -5 | 2 | -1 | | |

Daraus folgt:

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir dehnen nun unsere Überlegung über die Beziehungen zwischen linearen Abbildungen $\varphi: K^n \to K^m$ und Matrizen auf lineare Abbildungen $\varphi: X \to Y$ aus, wobei X und Y n- bzw. m-dimensionale Vektorräume über demselben Grundkörper K sind.

Sei $f = (f_1,\ldots,f_n)$ eine Basis von X und $g = (g_1,\ldots,g_m)$ eine Basis von Y. $\varphi$ ist eindeutig und durch die Bilder $\varphi(f_1),\ldots,\varphi(f_n)$ bestimmt. Es gibt aber für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$ genau eine Darstellung $\varphi(f_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g_j$ mit $a_{ij} \in K$.

Wir ordnen $\varphi$ die Matrix $A = (a_{ij})$ zu. Dadurch wird jeder linearen Abbildung $\varphi: X \to Y$ bzgl. <u>festgewählter Basen</u> in X und Y <u>genau eine</u> Matrix $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ zugeordnet.

<u>Bemerkung:</u> Das Resultat ist eine Verallgemeinerung der schon bekannten Beziehungen zwischen linearen Abbildungen und Matrizen, denn für $X = K^n$ und $Y = K^m$ mit den entsprechenden kanonischen Basen erhält man die bekannte Zuordnung.

Sei Z ein p-dimensionaler Verktorraum über K und $r = (r_1,\dots,r_p)$ eine Basis von Z. Den durch r induzierten kanonischen Isomorphismus von $K^p$ auf Z bezeichnen wir mit $h_r$, wobei gilt:

$$h_r(x_1,\dots,x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i r_i$$

<u>Satz 10.13</u>

Seien X und Y n- bzw. m-dimensionale Vektorräume über K mit festgewählten Basen f bzw. g. Dann gilt:

$$\varphi \circ h_f = h_g \circ A$$

Man beschreibt diese Tatsache durch das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "h_f"'] & K^m \arrow[d, "h_g"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

(<u>Bemerkung:</u> Da $h_g$ ein Isomorphismus ist, ist A durch die Gleichung $\varphi \circ h_f = h_g \circ A$ eindeutig bestimmt:

$$A = h_g^{-1} \circ \varphi \circ h_f.$$

Die Abbildung $L(X,Y) \to \mathfrak{M}(m,n)$, $\varphi(x,y) \to h_g^{-1} \circ \varphi \circ h_f$ ist also ein Isomorphismus (Beachte die Abhängigkeit dieses Isomorphismus von der Wahl der Basen!).)

<u>Beweis:</u>

Sei $x = (x_1,\dots,x_n)$ ein beliebiges Element von $K^n$. Dann gilt:

1.) $$(\varphi \circ h_f)(x_1,\dots,x_n) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(f_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) g_i .$$

2.) $$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \text{ wobei } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j .$$

Also gilt:

$$(h_g \circ A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)g_i \ .$$

<u>Satz 10.14</u>

Sei $\varphi$ eine lineare Abbildung der Vektorräume X und Y über K mit $\dim_K X = n$ und $\dim_K Y = m$. Dann folgt:

$$\dim_K \mathrm{Kern}\,\varphi \quad + \quad \mathrm{Rang}\,\varphi \quad = \quad n \ .$$

(<u>Bemerkung:</u> $\dim_K \mathrm{Kern}\,\varphi$ heißt Nullität von $\varphi$.)

<u>Beweis:</u>

Es gilt: $\mathrm{Kern}\,\varphi = \{x \mid x \in X \wedge \varphi(x) = 0\}$

$\mathrm{Bild}\,\varphi = \{y \mid y \in Y \wedge \bigvee_{x \in X} \varphi(x) = y\}$

Nach dem vorigen Satze gilt:

$\mathrm{Kern}\,A \cong \mathrm{Kern}\,\varphi$ und $\mathrm{Bild}\,A \cong \mathrm{Bild}\,\varphi$.

Nach Satz 10.8 und 10.9 ist $\dim_K \mathrm{Kern}\,A$ und $\mathrm{Rang}\,A = n$. Daraus folgt alles.

Seien X,Y,Z nun n-,m- bzw. l-dimensionale Vektorräume über K mit den Basen $f = (f_1,\ldots,f_n)$, $g = (g_1,\ldots,g_m)$ und $k = (k_1,\ldots,k_l)$.

<u>Satz 10.15</u>

Seien $\varphi: X \longrightarrow Y$ und $\psi: Y \longrightarrow Z$ lineare Abbildungen. Werde $\varphi$ die Matrix A bezüglich der Basen f,g und $\psi$ die Matrix B bezüglich der Basen g,k zugeordnet. Dann wird $\psi \circ \varphi$ bezüglich der Basen f und k die Matrix $B \cdot A$ zugeordnet.

<u>Beweis:</u>

Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "h_f"'] & K^m \arrow[r, "B"] \arrow[d, "h_g"'] & K^l \arrow[d, "h_k"'] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Aus der Kommutativität der Diagramme I und II folgt die Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "B\cdot A"] \arrow[d, "h_f"'] & K^l \arrow[d, "h_k"] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned} (\psi\circ\varphi)\circ h_f &= \psi\circ(\varphi\circ h_f) \underset{\mathrm{I}}{=} \psi\circ(h_g\circ A) \\ &= (\psi\circ h_g)\circ A \underset{\mathrm{II}}{=} (h_k\circ B)\circ A = h_k\circ(B\circ A). \end{aligned}$$

Sei X n-dimensionaler Vektorraum über K und seien $f = (f_1,\ldots,f_n)$ und $\tilde{f} = (\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_m)$ Basen von X. Wir untersuchen die Beziehungen zwischen f und $\tilde{f}$. Die Matrix $S = (s_{ij})$, die durch die Gleichung $\tilde{f}_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij}f_i$ $(1 \leq j \leq n)$ gegeben ist, heißt Matrix des Basiswechsels von f nach $\tilde{f}$. S ist die Matrix, die der Identität bzgl. der Basen $\tilde{f}$ und f zugeordnet wird (Beachte die Reihenfolge!).

<u>Satz 10.16</u>

S ist regulär.

<u>Beweis:</u>

T sei die Matrix des Basiswechsels von $\tilde{f}$ nach f. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "S"] \arrow[d, "h_{\tilde{f}}"'] & K^n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "h_f"'] & K^n \arrow[d, "h_{\tilde{f}}"'] \\ X \arrow[r] & X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

folgt, daß $T\cdot S$ die Basiswechsels von $\tilde{f}$ nach $\tilde{f}$ ist. Also gilt $T\cdot S = E$. Mit Satz 10.11 3.) folgt dann die Behauptung.

<u>Satz 10.17</u>

Sei $f = (f_1,\ldots,f_n)$ eine Basis von X und $S = (s_{ij}) \in \mathfrak{M}(n,n)$ regulär. Dann bilden die Vektoren $\tilde{f}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}f_i$ $(1 \leq j \leq n)$ eine Basis von X.

Beweis:

Es gilt: $f_i = h_f(e_i)$. Daraus folgt: $\tilde{f}_j = h_f(\sum_{i=1}^{n} s_{ij}e_i)$. Da $\sum_{i=1}^{n} s_{ij}e_i$ gleich der j-ten Spalte von S ist und S regulär ist, bilden die Vektoren $\sum_{i=1}^{n} s_{ij}e_i$ $(1 \leq j \leq n)$ eine Basis von $K^n$. Da $h_f$ ein Isomorphismus ist, bilden die Vektoren $\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_n$ eine Basis von X.

Satz 10.18

Voraussetzung:
X und Y seien n- bzw. m-dimensionale Vektorräume über K;
$f = (f_1,\ldots,f_n)$ und $\tilde{f} = (\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_n)$ seien Basen von X mit S als Matrix des Basiswechsels von f nach $\tilde{f}$;
$g = (g_1,\ldots,g_n)$ und $\tilde{g} = (\tilde{g}_1,\ldots,\tilde{g}_n)$ seien Basen von Y mit T als Matrix des Basiswechsels von g nach $\tilde{g}$;
sei $\varphi : X \longrightarrow Y$ linear und A die der Abbildung $\varphi$ bzgl. der Basen f und g zugeordnete Matrix.
Behauptung:
$T^{-1}\cdot A\cdot S$ ist die der Abbildung $\varphi$ bzgl. der Basen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ zugeordnete Matrix.

Beweis:

Die Aussage folgt aus der Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "S"] \arrow[d, "h_f"'] & K^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "h_f"'] & K^m \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "h_g"'] & K^m \arrow[d, "h_g"'] \\
X \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

## § 11 Determinanten

**Definition 11.1**

Sei $n > 1$ und $\sigma \in S_n$. Das Signum von $\sigma$ wird definiert durch:

$$\operatorname{sign} \sigma := \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{j - i}{\sigma(j) - \sigma(i)}$$

In Übungsaufgaben wurden die folgenden Eigenschaften von signum bewiesen:

1.) $\operatorname{sign} \sigma \in \{-1, 1\}$ für alle $\sigma \in S_n$.
2.) Seien $\tau, \sigma \in S_n$. Dann gilt: $\operatorname{sign}(\sigma \cdot \tau) = \operatorname{sign} \sigma \operatorname{sign} \tau$.
3.) Ist $\sigma \in S_n$ ein Produkt von $m$ Transpositionen. Dann gilt: $\operatorname{sign} \sigma = (-1)^m$.

Bemerkung: Unter einer Transposition versteht man eine Permutation, die zwei Elemente vertauscht und die übrigen fest läßt. Jede Permutation läßt sich als Produkt von Transpositionen schreiben.

**Definition 11.2**

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(n,n)$ mit Koeffizienten in K.

$$\operatorname{Det} A := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \, a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Det A heißt die Determinante von A. Schreibweise: $\operatorname{Det} A := |A|$.

Beispiele für die Berechnung von Determinanten.

1.) Sei $A \in \mathfrak{M}(2,2)$. Dann gilt:

$$\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

2.) Sei A (3,3). Dann gilt:

$$\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + \\ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} . \end{array}$$

Merkregel zur Berechnung der Determinante einer 3x3-Matrix:

Man betrachtet das System:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Sei $\alpha$ die Summe der Prpdukte auf den durchgezogenen Linien und $\beta$ die Summe der Produkte auf den gepunkteten Linien. Dann gilt: $\operatorname{Det} A = \alpha - \beta$ .
(Vorsicht: Die Merkregel gilt nur für 3x3-Matrizen!)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(n,n)$. $a_i$ seien die Zeilen von A, d.h. $a_i = (a_{i1},\ldots,a_{in})$ für $i = 1,\ldots,n$.
Wir können daher die Determinante als Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{Det} : K^n \times \ldots \times K^n &\longrightarrow K \\ (a_1,\ldots,a_n) &\longrightarrow \operatorname{Det}(a_{ij}) := \operatorname{Det}(a_1,\ldots,a_n) \end{aligned}$$

auffassen.

<u>Eigenschaften der Abbildung Det:</u>

1.) Seien $a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n$ festgewählte Vektoren aus $K^n$. Dann gilt: Die Abbildung

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow K \\ x &\longrightarrow \operatorname{Det}(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n) \end{aligned}$$

ist linear.

<u>Beweis:</u>

Sei $z \in K^n$, dann setzt man $z_i$ = i-te Komponente von z.
Seien $x,y \in K^n$ und $\lambda_1,\lambda_2 \in K$.
Dann gilt: $\operatorname{Det}(a_1,\ldots,a_{i-1},\lambda_1 x+\lambda_2 y,a_{i+1},\ldots,a_n) =$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi\,(a_{1,\pi(1)}\cdots a_{i-1,\pi(i-1)}\cdot(\lambda_1 x+\lambda_2 y)_{\pi(i)}\cdot a_{i+1,\pi(i+1)}\cdots a_{n,\pi(n)})$$

$$= \lambda_1 \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi\,(a_{1,\pi(1)}\cdots a_{i-1,\pi(i-1)}x_{\pi(i)}a_{i+1,\pi(i+1)}\cdots a_{n,\pi(n)})$$

$$+ \lambda_2 \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi\,(a_{1,\pi(1)}\cdots a_{i-1,\pi(i-1)}y_{\pi(i)}a_{i+1,\pi(i+1)}\cdots a_{n,\pi(n)})$$

$$= \lambda_1 \operatorname{Det}(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n) + \lambda_2 \operatorname{Det}(a_1,\ldots,a_{i-1},y,a_{i+1},\ldots,a_n) .$$

2.) Seien $i,j \in \{1,\dots,n\}$ mit $i \neq j$ und $a_i = a_j$.
Dann gilt: $\mathrm{Det}\,(a_1,\dots,a_n) = 0$ .
<u>Beweis:</u>

Zum Beweis benötigen wir einige allgemeine Eigenschaften von $S_n$:

$A_n := \{\pi \mid \pi \in S_n \wedge \mathrm{sign}\,\pi = 1\}$ ist eine Untergruppe von $S_n$ und heißt die <u>alternierende Gruppe</u>.

Sei $\pi_0 \in S_n$ mit $\mathrm{sign}\,\pi_0 = -1$. Dann ist $A_n \cdot \pi_0 := \{\pi_0 \cdot \pi_0 \mid \pi \in A_n\}$. die Menge aller Permutationen $\pi \in S_n$ mit $\mathrm{sign}\,\pi = -1$.

Die Abbildungen $A_n \longrightarrow A_n \cdot \pi_0$ und
$A_n \longrightarrow \pi_0 A := \{\pi_0 \cdot \pi \mid \pi \in A_n\}$ sind bijektiv.
Folgerung: $\# A = n!/2$.

Sei $\pi_0$ die Transposition mit $\pi_0(i) = j$.
Dann gilt: $a_{\pi_0(r),s} = a_{r,s}$ für alle $r,s \in \{1,\dots,n\}$.
Nach obiger Bemerkung gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}\,A &= \sum_{\pi \in A_n} \mathrm{sign}\,\pi\, a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} + \sum_{\pi \in A_n} \mathrm{sign}(\pi \cdot \pi_0)\, a_{1,\pi\cdot\pi_0(1)} \dots a_{n,\pi\cdot\pi_0(n)} \\
&= \sum_{\pi \in A_n} a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} + \sum_{\pi \in A_n} \mathrm{sign}\,\pi_0\, a_{\pi_0(1),\pi(1)} \dots a_{\pi_0(n),\pi(n)} \\
&\quad \text{(denn für ein jedes } \sigma \in S_n \text{ gilt: } z_1 \dots z_n = z_{\sigma(1)} \dots z_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\pi \in A_n} a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} - \sum_{\pi \in A_n} a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} \\
&\quad \text{(da } a_{\pi_0(i),\pi(i)} = a_{i,\pi(i)} \text{ ist)}.
\end{aligned}$$

Also gilt: $\mathrm{Det}\,A = 0$.

3.) Sei $i \neq k$. Dann gilt:
$\mathrm{Det}(a_1,\dots,a_i + a_k,\dots,a_k,\dots,a_n) = \mathrm{Det}(a_1,\dots,a_n)$.
<u>Beweis:</u>
$\mathrm{Det}(a_1,\dots,a_i + a_k,\dots,a_k,\dots,a_n) =$
$\mathrm{Det}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n) + \mathrm{Det}(a_1,\dots,a_k,\dots,a_k,\dots,a_n) =$
$\mathrm{Det}(a_1,\dots,a_n)$.
Der Beweis folgt aus der Linearität der Abbildung Det und der Eigenschaft 2.).

4.) Sei $i < j$. Dann gilt:

$$\mathrm{Det}(a_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-te Stelle}}}{a_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{j-te Stelle}}}{a_j},\dots,a_n) = -\mathrm{Det}(a_1,\dots,\overset{\substack{\downarrow \\ \text{i-te Stelle}}}{a_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{j-te Stelle}}}{a_i},\dots,a_n)$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Det}(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_n) = \\
&\mathrm{Det}(a_1,\ldots,a_i + a_j,\ldots,a_j,\ldots,a_n) = \\
&\mathrm{Det}(a_1,\ldots,a_i + a_j,\ldots,-a_i,\ldots,a_n) = \\
&-\mathrm{Det}(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_i,\ldots,a_n).
\end{aligned}$$

4a.) $\mathrm{Det}\,(a_1,\ldots,a_n) = \mathrm{sign}\,\pi\,\mathrm{Det}\,(a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(n)})$

<u>Beweis:</u>

Die Aussage folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß sich jede Permutation als Produkt von Transpositionen schreiben läßt.

5.) Sei $A = (a_{ij})$ obere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Dann gilt: $\mathrm{Det}\,A = a_{11}\ldots a_{nn}$.

<u>Beweis:</u>

Zum Beweis betrachte man die Tatsache, daß für $\pi \in S_n$ gilt: $i \neq j \Longleftrightarrow \pi(i) \neq \pi(j)$.

6.) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(n.n)$. Mit $A^T$ bezeichnen wir die Matrix $B = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = a_{ji}$. Es gilt: $\mathrm{Det}\,A = \mathrm{Det}\,A^T$.

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}\,A^T &= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sign}\,\pi\, b_{1,\pi(1)}\ldots b_{n,\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sign}\,\pi\, a_{\pi(1),1}\ldots a_{\pi(n),n} = \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sign}\,\pi\, a_{1,\pi^{-1}(1)}\ldots a_{n,\pi^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sign}\,\pi^{-1}\, a_{1,\pi^{-1}(1)}\ldots a_{n,\pi^{-1}(n)} \quad (\text{da sign} = \text{sign}) \\
&= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sign}\,\pi\, a_{1,\pi(1)}\ldots a_{n,\pi(n)} = \mathrm{Det}\,A.
\end{aligned}$$

Wir haben bisher die Determinante einer Matrix als Funktion ihrer Zeilen aufgefaßt. Die Eigenschaften 1.) bis 4.) können deshalb folgendermaßen formuliert werden:

1.) Die Determinante ist eine lineare Funktion der i-ten Zeile, $i = 1,\ldots,n$.
2.) Wenn zwei Zeilen gleich sind, dann gilt: $\mathrm{Det}\,A = 0$.
3.) Die Addition des $\lambda$-fachen einer Zeile zu einer anderen ändert den Wert der Determinante nicht.
4.) Bei Vertauschung zweier Zeilen ändert sich der Wert der Determinante um den Faktor $(-1)$.

Wegen $\mathrm{Det}\,A = \mathrm{Det}\,A$ gelten die Aussagen 1.) bis 4.) auch, wenn wir jeweils das Wort Zeile durch das Wort Spalte ersetzen.

7.) $\mathrm{Det}(a_1,\ldots,a_n) \neq 0 \Leftrightarrow a_1,\ldots,a_n$ linear unabhängig.

Beweis:
Bei den erlaubten Operationen 1.), 3.), 4.) (Vorbereitung zu Satz 10.6) ändert sich der Wert der Determinante höchstens um den Faktor (-1). Da durch diese Operationen die Matrix mit den Zeilen $a_1,\ldots,a_n$ auf die Form

$$\begin{array}{|c|c|}\hline D & C \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

gebracht werden kann, wobei $D = (d_{ij}) \in \mathfrak{M}(r,r)$ obere Dreiecksmatrix mit $d_{ii} \neq 0$ $(1 \leq i \leq r)$ ist, gilt: $\mathrm{Det}\, A \neq 0 \Leftrightarrow r = n$. Da aber $a_1,\ldots,a_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $r = n$ ist, gilt die Behauptung.

8.) Seien A und $B \in \mathfrak{M}(n.n)$. Dann gilt:
$\mathrm{Det}\,(A \cdot B) = \mathrm{Det}\, A \cdot \mathrm{Det}\, B$.
Beweis:
Einen Beweis für diese Aussage erhalten wir später als Folgerung aus Satz 11.17.

Aus der Eigenschaft 7.) folgt: $\mathrm{Det}\, A \neq 0 \Leftrightarrow A$ regulär.
Also gilt für $A \in Gl(K^n)$: $\mathrm{Det}\, A \in K^* = K - \{0\}$.

Aus der Eigenschaft 8.) folgt, daß die Beschränkung von Det auf $Gl(K^n)$ einen Homomorphismus $Gl(K^n) \longrightarrow K^*$ darstellt. Dabei wird ein (Gruppen-)Homomorphismus folgendermaßen definiert:

Definition 11.3

Seien $G_1$ und $G_2$ Gruppen. Eine Abbildung $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ heißt (Gruppen-)Homomorphismus, wenn für alle $g,g' \in G_1$ gilt: $\varphi(g \circ g') = \varphi(g) \circ \varphi(g')$.

Definition 11.4

Seien $X_1,\ldots,X_k,Y$ Vektorräume über K. Dann heißt die Abbildung $\phi: X_1 x \ldots x X_k \rightarrow Y$ multilinear, wenn für alle $i \in \{1,\ldots,k\}$ und beliebige, aber festgewählte $a_j \in X_j$ $(j \neq i)$ die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow Y \\ x &\rightarrow \phi(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_k) \end{aligned}$$

linear ist.

Definition 11.5

Sei X ein Vektorraum über K.
Eine multilineare Abbildung $\Phi : X \times \underbrace{\ldots}_{k\text{-mal}} \times X \longrightarrow K$ heißt alternierend, wenn für $i,j \in \{1,\ldots,k\}$ und $i \neq j$ gilt: $a_i = a_j \Rightarrow \Phi(a_1,\ldots,a_k) = 0$.

Bezeichnung: $\Phi$ bezeichnet man als alternierende Multilinearform.

Beispiel: $\mathrm{Det} : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{n\text{-mal}} \to K$ ist eine alternierende Multilinearform.

Satz 11.1

Sei $\Phi : X \times X \to K$ eine alternierende Multilinearform.
Dann gilt: $\Phi(a,b) = -\Phi(b,a)$

Beweis:

$0 = \Phi(a+b,a+b) = \Phi(a,a) + \Phi(a,b) + \Phi(b,a) + \Phi(b.b)$
$\Rightarrow \Phi(a,b) = -\Phi(b,a)$.

Bemerkung: Man beachte, daß die Umkehrung des Satzes i.a. falsch ist (sie gilt jedoch für Körper K mit $-1 \neq 1$).

Korollar:

Sei $\Phi : X \underbrace{\times \ldots \times}_{n\text{-mal}} X \to K$ eine alternierende Multilinearform und $\pi \in S_k$. Dann gilt:
$\Phi(a_1,\ldots,a_k) = \operatorname{sign}\pi \; \Phi(a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(k)})$

Sei $\Lambda^k(X^*)$ die Menge aller alternierender Multilinearformen $\Phi : X \times \ldots \times X \longrightarrow K$.
Auf $\Lambda^k(X^*)$ werden folgende Operationen definiert:
$(\Phi_1 + \Phi_2)(a_1,\ldots,a_k) := \Phi_1(a_1,\ldots,a_k) + \Phi_2(a_1,\ldots,a_k)$
$(\lambda\Phi)(a_1,\ldots,a_k) = \lambda\Phi(a_1,\ldots,a_k)$
Mit diesen Operationen ist $\Lambda^k(X\ )$ ein Vektorraum.

Satz 11.2

Sei $\phi \in \Lambda^k(X^*)$ und $a_1,\dots,a_k \in X$ linear abhängig.
Dann gilt: $\phi(a_1,\dots,a_k) = 0$.

Beweis:

Sei $a_1,\dots,a_k \in X$ linear abhängig. Dann gibt es ein $j \in \{1,\dots,k\}$ mit $a_j = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{j-1}a_{j-1} + \lambda_{j+1}a_{j+1} + \dots + \lambda_k a_k$

$$\begin{aligned}\phi(a_1,\dots,a_k) &= \phi(a_1,\dots,a_{j-1}, \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \lambda_i a_i, a_{j+1},\dots,a_k)\\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \lambda_i \phi(a_1,\dots,a_{j-1},a_i,a_{j+1},\dots,a_k)\\ &= 0\end{aligned}$$

Seien n und k ganze Zahlen $\geq 0$. Bekanntlich ist der Binominalkoeffizient $\binom{n}{k}$ gleich der Kardinalzahl der Menge aller k-zahligen Untermengen von $\{1,\dots,n\}$.
Bemerkung: Für $k > n$ gilt: $\binom{n}{k} = 0$.

Satz 11.3

Sei $\dim X = n$. Dann gilt: $\dim_K \Lambda^k(X^*) = \binom{n}{k}$.

Beweis:

Fallunterscheidung:

1.) $k > n$. Dann gilt für alle $a_1,\dots,a_k \in X$: $a_1,\dots,a_k$ sind linear abhängig. Daraus folgt für alle $\phi \in \Lambda^k(X^*)$: $\phi(a_1,\dots,a_k) = 0$. Also gilt: $\dim_k \Lambda^k(X^*) = 0 = \binom{n}{k}$.

2.) $k \leq n$. Sei $b_1,\dots,b_n$ eine Basis von X. Sei $\phi \in \Lambda^k(X^*)$ und $a_1,\dots,a_k \in X$. Dann gilt: $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$.
Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\phi(a_1,\dots,a_k) &= \phi\Big(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\cdot b_{j_1},\dots,\sum_{j_k=1}^{n} a_{kj_k} b_{j_k}\Big)\\ &= \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} a_{1j_1}\dots a_{kj_k}\,\phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k}) =\\ &\quad \text{(wegen der Multinlinearität von } \phi\text{)}\\ &= \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} a_{1j_1}\dots a_{kj_k}\,\phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k})\end{aligned}$$

$(\phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k}) = 0$ für $j_r = j_s$ mit $r \neq s)$

Sei $M \in \{1,\dots,n\}$, $\# M = k$. Dann läßt sich M in der Form $M = \{d_1,\dots,d_k\}$ mit $d_1 < \dots < d_k$ schreiben. Dann ist die Menge aller $(j_1,\dots,j_k) \in M^k$ gleich der Menge $\{(d_{\pi(1)},\dots,d_{\pi(k)}) \mid \pi \in S_k\}$.

Also gilt:

$$\underset{\text{für } r\neq s}{j_r \neq j_s} \sum_{j_1,\dots,j_k \in M} a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\,\Phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k})$$
$$= \sum_{\pi\in S_k} a_{1d_{\pi(1)}}\cdots a_{kd_{\pi(k)}}\,\Phi(b_{d_{\pi(1)}},\dots,b_{d_{\pi(k)}})$$
$$= \sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sign}\pi\; a_{1d_{\pi(1)}}\cdots a_{kd_{\pi(k)}}\,\Phi(b_{d_1},\dots,b_{d_k}).$$

Daraus folgt:

$$\sum_{\substack{M\in\{1,\dots,n\}\\ \#M=k}} \sum_{\substack{j_1,\dots,j_k\in M\\ j_r\neq j_s \text{ für } r\neq s}} a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\,\Phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k})$$
$$= \sum_{1\le d_1<\dots<d_k\le n} \Big[\sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sign}\pi\; a_{1d_{\pi(1)}}\cdots a_{kd_{\pi(k)}}\,\Phi(b_{d_1},\dots,b_{d_k})$$
$$= \sum_{1\le d_1<\dots<d_k\le n} \begin{vmatrix} a_{1d} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{kd} & \cdots & a_{kd} \end{vmatrix} \Phi(b_{d_1},\dots,b_{d_k}) \qquad \text{(nach Def. der Det.)}$$

Zur Angabe eines Isomorphismus von $\Lambda^k(X^*)$ auf $K^{\binom{n}{k}}$ führen wir die Relation $<$ ein auf der Menge

$\{(j_1,\dots,j_k) \mid 1\le j_1<\dots<j_k\le n$ :

$(j_1,\dots,j_k) < (i_1,\dots,i_k) \Longleftrightarrow \bigvee_{0<r\le k} \bigwedge_{s<r} j_s = i_s$ und $j_r < i_r$.

Diese Relation bezeichnet man als lexikographische Ordnung.

Sei $1\le j_1<\dots<j_k\le n$ und $1\le i_1<\dots<i_k\le n$.

$\Phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k}) < \Phi(b_{i_1},\dots,b_{i_k}) \;:\Longleftrightarrow$

$(j_1,\dots,j_k) < (i_1,\dots,i_k)$.

Wie man leicht sieht, gibt es genau ein $\binom{n}{k}$-Tupel $(c_1,\dots,c_{\binom{n}{k}})$ mit $c_i \in \{\Phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k}) \;\; 1\le j_1<\dots<j_k\le n\}$ für $i\in\{1,\dots,\binom{n}{k}\}$ und $c_{l-1}<c_l$ für alle $l\in\{2,\dots,\binom{n}{k}\}$.

Wir bezeichnen dieses $\binom{n}{k}$-Tupel folgendermaßen:

$(\Phi(b_{j_1},\dots,b_{j_m}))_{j_1<\dots<j_k}$.

Behauptung: Die Abbildung $\Lambda^k(X^*) \to K^{\binom{n}{k}}$, $\Phi \to (\Phi(b_{j_1},\dots,b_{j_m}))_{j_1<\dots<j_n}$ ist ein Isomorphismus.

a) Aus der Definition der Operationen auf $\Lambda^k(X^*)$ folgt, daß die Abbildung linear ist.

b) Aus $(\Phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k}))_{j_1<\dots<j_k} = 0 \in K^{\binom{n}{k}}$ folgt

$$\Phi(a_1,\dots,a_k) = \sum_{1\le d_1<\dots<d_n\le n} \begin{vmatrix} a_{1d} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \\ a_{nd} & \cdots & a_{nd} \end{vmatrix} \Phi(b_{d_1},\dots,b_{d_k})$$
$$= 0 .$$

Also ist die Abbildung injektiv.

c) Sei $(c_{j_1},\dots,c_{j_k})_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n}$ ein lexikographisch geordnetes $\binom{n}{k}$-Tupel. Es ist zu zeigen: Es gibt $\phi \in \Lambda^k(X^*)$ mit
$(\phi(b_{j_1},\dots,b_{j_m}))_{j_1 < \dots < j_k} = (c_{j_1},\dots,c_{j_k})_{j_1 < \dots < j_k}$.
Wir definieren $\phi$ durch:

$$\phi(a_1,\dots,a_k) := \sum_{d_1 < \dots < d_k} \begin{vmatrix} a_{1d_1} & \dots a_{1d_k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{kd_k} & \dots a_{kd_k} \end{vmatrix} c_{d_1} \dots c_{d_k} .$$

$\phi$ ist alternierende Multilinearform. Um die Koeffizientenmatrix von $b_i$ zu bestimmen, führen wir das Kroneckersymbol ein:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Dann gilt: $b_{j_r} = \sum_{l=1}^{m} \delta_{j_r}^l b_l$ .

Sei $1 \le d_1 < \dots < d_k \le n$ und $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$.
Dann gilt:

$$\begin{vmatrix} \delta_{j_1}^{d_1} & \delta_{j_1}^{d_k} \\ \delta_{j_k}^{d_1} & \delta_{j_k}^{d_k} \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 \text{ für } (j_1,\dots,j_k) \neq (d_1,\dots,d_k) \\ 1 \text{ für } (j_1,\dots,j_k) = (d_1,\dots,d_k) \end{cases}$$

Beweis: Sei $(j_1,\dots,j_k) \neq (d_1,\dots,d_k)$. Dann gilt:

$\bigvee_{i \in \{1,\dots,k\}} \bigwedge_{s \in \{1,\dots,k\}} j_s \neq d_i$, denn aus dem Ansatz
$\bigwedge_{i \in \{1,\dots,k\}} \bigvee_{s \in \{1,\dots,k\}} j_s = d_i$ und der Voraussetzung $d_1 < \dots < d_k$ bzw. $j_1 < \dots < j_k$ folgt: $(j_1,\dots,j_k) = (d_1,\dots,d_k)$; Widerspruch!.

Daraus folgt, daß die i-te Spalte der obigen Matrix gleich 0 ist. Also gilt: $\mathrm{Det}\,(\delta_{j_l}^{d_r}) = 0$.
Sei nun $(j_1,\dots,j_k) = (d_1,\dots,d_k)$. Dann gilt:

$\delta_{j_l}^{d_r} = \begin{cases} 1 \text{ für } l = r \\ 0 \text{ für } l \neq r \end{cases}$ . Also gilt: $\mathrm{Det}(\delta_{j_l}^{d_r}) = 1$.

Aus $\left|\delta^{d_r}_{j_\ell}\right| = \begin{cases} 1 & \text{für } (j_1,\dots,j_r) \neq (d_1,\dots,d_r) \\ 0 & \text{für } (j_1,\dots,j_r) = (d_1,\dots,d_r) \end{cases}$ folgt:

$$\phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k}) = \sum_{d_1<\dots<d_k} \left|\delta^{d_1}_{j_\ell}\right| c_{d_1\dots d_k} = c_{j_1\dots j_k}.$$

Aus a), b), c) folgt, daß die Abbildung

$\Lambda^k(X^*) \to K^{\binom{n}{k}} \quad \phi \to (\phi(b_{j_1},\dots,b_{j_k}))_{j_1<\dots<j_k}$

ein Isomorphismus ist. (q.e.d.)

Mit Hilfe dieses Isomorphismus konstruieren wir eine Basis von $\Lambda^k(X^*)$. Aus den Eigenschaften eines Isomorphismus folgt, daß die Urbilder der kanonischen Basisvektoren von $K^{\binom{n}{k}}$ eine Basis von $\Lambda^k(X^*)$ bilden.

Sei $(c_{j_1}\dots c_{j_k})_{j_1<\dots<j_k}$ Basisvektor von $K^{\binom{n}{k}}$, sodaß

$c_{j_1}\dots c_{j_k} = \begin{cases} 0 & \text{für } (j_1,\dots,j_n) \neq (d_1,\dots,d_k) \\ 1 & \text{für } (j_1,\dots,j_n) = (d_1,\dots,d_k) \end{cases}$.

Aus dem vorigen Beweis folgt, daß das Urbild dieses Basisvektors folgende Multilinearform $\phi_{d_1\dots d_k}$ ist:

$$\phi_{d_1\dots d_k}(a_1,\dots,a_k) = \begin{vmatrix} a_{1d_1} & \dots & a_{1d_k} \\ \vdots & & \\ a_{nd_1} & \dots & a_{kd_k} \end{vmatrix}.$$

<u>Bemerkung:</u> Man beachte, daß der Isomorphismus von $\Lambda^k(X^*)$ auf $K^{\binom{n}{k}}$ und die Angabe dieser Basis von $\Lambda^k(X^*)$ von der Wahl der Basis in X abhängt.

<u>Folgerungen:</u>

1.) $\dim \Lambda^k(X^*) = 1$.

Die bezüglich einer Basis $b_1,\dots,b_n$ von X der kanonischen Basis von K zugeordnete Basis in $\Lambda^k(X^*)$ ist die Abbildung: $(a_1,\dots,a_n) \to \mathrm{Det}(a_{ij})$ mit $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$.

Sei $\phi \in \Lambda^k(X^*)$. Dann gilt:

$\phi(a_1,\dots,a_n) = \mathrm{Det}(a_{ij}) \cdot \phi(b_1,\dots,b_n)$.

2.) Für $k = 1$ gilt: $\Lambda^1(X^*) = X$ und $\dim \Lambda^1(X^*) = n$.

Sei $b_1,\dots,b_n$ Basis von X. Dann bilden die Vektoren $b_1^*,\dots,b_n^* \in X^*$ mit $b_i^*(b_j) = \delta_j^i$ die der kanonischen Basis in $K^n$ entsprechende Basis von $X^*$. Sie heißt die <u>duale Basis</u> zu $b_1,\dots,b_n$.

Wir haben bisher eine Vorschrift $\Lambda^k$ betrachtet, die jedem Vektorraum von X den Vektorraum $\Lambda^k(X^*)$ zuordnet.
Seien X und Y Vektorräume über K. Dann ordnen wir jeder linearen Abbildung $\varphi: X \to Y$ eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Lambda^k(\varphi^*) : \Lambda^k(Y) &\longrightarrow \Lambda^k(X^*) \\ \phi &\longrightarrow \Lambda^k(\varphi^*) \end{aligned}$$

mit $(\Lambda^k(\varphi^n)\phi)(a_1,\dots,a_n) := \phi(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_k))$ für $(a_1,\dots,a_n) \in X \times \dots \times X$ zu.
Man kann sich leicht überlegen, daß $\Lambda^k(\varphi^*)$ linear ist.

<u>Satz 11.4</u>

Seien X,Y,Z Vektorräume über K und $\psi: X \to Y$ bzw. $\varphi: Y \to Z$ lineare Abbildungen.
Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k(Z^*) \arrow[rr, "\Lambda^k(\varphi^*)"] \arrow[dr, "\Lambda^k((\varphi\circ\psi)^*)"'] & & \Lambda^k(Y^*) \arrow[dl, "\Lambda^k(\psi^*)"] \\ & \Lambda^k(X^*) & \end{tikzcd}$$

das heißt: $\Lambda^k(\psi^*)\circ\Lambda^k(\varphi^*) = \Lambda^k((\varphi\circ\psi)^*)$. (1)

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned} &(\Lambda^k((\varphi\circ\psi)^*)\,\phi)(a_1,\dots,a_k) \\ &= \phi(\varphi(\psi(a_1)),\dots,\varphi(\psi(a_k))) \\ &= (\Lambda^k(\varphi^*)\phi)(\psi(a_1),\dots,\psi(a_k)) \\ &= [\Lambda^k(\psi^*)(\Lambda^k(\varphi^*)\phi)](a_1,\dots,a_k) \\ &= [(\Lambda^k(\psi^*)\circ\Lambda^k(\varphi^*))\phi](a_1,\dots,a_k). \end{aligned}$$

Für $Id: X \to X$ gilt: $\Lambda^k(Id^*) = Id: \Lambda^k(X^*) \to \Lambda^k(X^*)$. (2)
Für $k = 1$ bezeichnen wir $\Lambda^1(\varphi^*)$ mit $\varphi^*$. Dann gilt für lineare Abbildungen $\psi: X \to Y$ und $\varphi: Y \to Z$:
$\varphi^*: Z^* \to Y^*$ und $\psi^*: Y^* \to X^*$ mit $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

Wir haben hiermit für festes $k \in \mathbb{N}$ jedem Vektorraum X den Vektorraum $\Lambda^k(X^*)$ und jeder linearen Abbildung $\varphi: X \to Y$ eine lineare Abbildung $\Lambda^k(\varphi^*): \Lambda^k(Y^*) \to \Lambda^k(X^*)$ zugeordnet.
Diese Zuordnung ist ein Beispiel für einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Vektrorräume und linearen Abbildungen in sich. Ein <u>kontravarianter Funktor</u> wird im wesentlichen durch die Eigenschaften (1) und (2) charakterisiert.

<u>Satz 11.5</u>

Sei $\varphi: X \to Y$ ein Isomorphismus, dann ist
$$\Lambda^k(\varphi^*): \Lambda^k(Y^*) \to \Lambda^k(X^*)$$
auch ein Isomorphismus.

<u>Beweis:</u>

Es existiert eine lineare Abbildung $\psi: Y \to X$ mit $\varphi \circ \psi = Id_Y$ und $\psi \circ \varphi = Id_X$.
Aus den Funktoreigenschaften (1) und (2) folgt dann:
$$\Lambda^k((\varphi \circ \psi)^*) = \Lambda^k(\psi^*) \circ \Lambda^k(\varphi^*) = Id_{\Lambda^k(Y^*)} \text{ und}$$
$$\Lambda^k((\psi \circ \varphi)^*) = \Lambda^k(\varphi^*) \circ \Lambda^k(\psi^*) = Id_{\Lambda^k(X^*)}.$$

Im folgenden bringen wir ein Beispiel für einen kovarianten Funktor von der Kategorie der Vektorräume auf sich. Wir ordnen jedem Vektorraum X den Dualraum von $\Lambda^k(X^*)$ zu. Wir bezeichnen $\Lambda^k(X^*)^*$ mit $\Lambda^k(X)$.
Der linearen Abbildung $\varphi: X \to Y$ ordnen wir die lineare Abbildung $\Lambda^k(\varphi) := \Lambda^k(\varphi^*)^*$ zu.
Es gilt: $\Lambda^k(\varphi): \Lambda^k(X) \to \Lambda^k(Y)$.
Diese Zuordnung erfüllt die folgenden Eigenschaften:
Seien $\psi: X \to Y$ und $\varphi: Y \to Z$ lineare Abbildungen.
Dann gilt:
$$\Lambda^k(\psi \circ \varphi) = \Lambda^k(\psi) \circ \Lambda^k(\varphi)$$
$$\Lambda^k(Id_X) = Id_{\Lambda^k(X)}.$$

Wir haben bisher die Determinanten einer Matrix definiert. Seien nun X und Y n-dimensionale Vektorräume. Da durch die Angabe fester Basen in X und Y einer linearen Abbildung $\varphi: X \to Y$ genau eine Matrix entspricht, können wir bezüglich dieser Basis auch von der Determinante einer linearen Abbildung sprechen. Speziell für $Y = X$ kann unabhängig von der Wahl einer Basis in X eine Abbildung $\mathrm{Det}: L(X,X) \to K$ definiert werden.

Sei Z ein eindimensionaler Vektorraum und $\varphi: Z \to Z$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau ein $c \in K$ mit $\varphi(z) = c \cdot z$ für alle $z \in Z$. Sei $\psi: X \to X$ ein Endomorphismus. Da $\Lambda^n(X^*)$ ein eindimensionaler Vektorraum ist, gibt es genau ein $c \in K$ mit $\Lambda^k(\psi^*)\phi = c \cdot \phi$ für alle $\phi \in \Lambda^k(X^*)$. $\mathrm{Det}(\psi) := c$.

<u>Satz 11.6</u>

Seien $\varphi_1$ und $\varphi_2 \in L(X,X)$. Dann gilt:
$\mathrm{Det}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \mathrm{Det}\varphi_2 \cdot \mathrm{Det}\varphi_1$.

<u>Beweis:</u>

$$\Lambda^n((\varphi_1 \circ \varphi_2)^*)\phi = [\Lambda^n(\varphi_2^*) \circ \Lambda^n(\varphi_1^*)]\phi$$
$$= \Lambda^n(\varphi_2^*)[(\Lambda^n\varphi_1^*)\phi] = \mathrm{Det}\varphi_2 \cdot \mathrm{Det}\varphi_1 \quad \square$$

<u>Satz 11.7</u>

Sei X ein Vektorraum über K mit der Basis $b_1, \ldots, b_n$, $\varphi: X \to X$ ein Endomorphismus und $A = (a_{ij})$ die durch $\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$ gegebene Matrix. Dann gilt:

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}\varphi .$$

<u>Beweis:</u>

Nach der Formel (F) im Beweis zu Satz 11.3 gilt für $\phi \in \Lambda^n(X^*)$:

$$\phi(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)) = \mathrm{Det}\, A^T \cdot \phi(b_1, \ldots, b_n)$$
$$= \mathrm{Det}\, A \cdot \phi(b_1, \ldots, b_n).$$

Daraus folgt: $(\Lambda^n(\varphi^*)\phi)(b_1, \ldots, b_n) = \mathrm{Det}\, A \cdot \phi(b_1, \ldots, b_n)$.
Sei $(a_1, \ldots, a_n) \in \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ mal}}$ mit $a_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} b_i$. Nach Formel (F) gilt:

$$(\Lambda^n(\varphi^*)\phi)(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{Det}\,(b_{ij})(\Lambda^n(\varphi^*)\phi)(b_1, \ldots, b_n)$$
$$= \mathrm{Det}\,(b_{ij})\, \mathrm{Det}\, A\, \phi(b_1, \ldots, b_n)$$
$$= \mathrm{Det}\, A\, \phi(a_1, \ldots, a_n)$$

Also gilt: $\Lambda^n(\varphi^*)\phi = \mathrm{Det}\, A \cdot \phi$ .

<u>Folgerung:</u> Da für $X = K^n$ mit der kanonischen Basis $L(X,X) = \mathfrak{M}(n,n)$ ist, gilt für $A,B \in \mathfrak{M}(n,n)$:
$\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}A \cdot \mathrm{Det}B$
(Dies ist der Beweis für Eigenschaft (8.) der Determinante.)

<u>Satz 11.8</u>
Sei X ein Vektorraum mit Basis $\{b_1,\dots,b_n\}$ und $\{b_1^*,\dots,b_n^*\}$ die duale Basis von X . Eine Matrix $A = (a_{ij})$ definiert einen Endomorphismus $\varphi: X \longrightarrow X$ durch $\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$. Dann gilt:
$A^\tau$ ist die Matrix, die der Abbildung $\varphi^*: X^* \longrightarrow X^*$ bezüglich der Dualbasis entspricht.

<u>Beweis:</u>
Es gilt: $(\varphi^* b_i^*)(b_j) = b_i^*(\varphi b_j) = b_i^*(\sum_{r=1}^{n} a_{rj} b_r)$
$= \sum_{r=1}^{n} a_{rj} b_i^*(b_r) = a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_s^*(b_j)$.
Also gilt: $\varphi^* b_i^* = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_s$ .

<u>Folgerung:</u> Aus den Eigenschaften eines kontravarianten Funktors $((\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$ und mit Satz 11.8 folgt:

$$(A \cdot B)^\tau = B^\tau \cdot A^\tau ,$$

eine auch leicht direkt nachprüfbare Formel.

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(n,n)$ und $1 \leq k \leq n$.
Für $\gamma = (j_1,\dots,j_k)$ mit $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ definieren wir

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \dots & a_{1j_k} \\ \vdots & & \\ a_{kj_1} & \dots & a_{kj_k} \end{pmatrix}$$

Es gibt genau ein (n-k)-Tupel $\gamma^* = (i_1,\dots,i_{n-k})$ mit $\{1,\dots,n\} - \{j_1,\dots,j_k\} = \{i_1,\dots,i_{n-k}\}$ und $i_1 < \dots < i_{n-k}$.

Dann sei:

$$A_\gamma^* := \begin{pmatrix} a_{k+1,i_1} & \cdots & a_{k+1,i_{n-k}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,i_1} & \cdots & a_{n,i_{n-k}} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sign}\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k & i_1 & \dots & i_{n-k} \end{pmatrix}$$

<u>Satz 11.9</u> (<u>Laplace'scher Entwicklungssatz</u>)

$$\operatorname{Det} A = \sum_{\substack{\gamma=(j_1,\dots,j_k) \\ 1\le j_1<\dots<j_k\le n}} \operatorname{sign}\gamma \operatorname{Det} A_\gamma \operatorname{Det} A_{\gamma^*}$$

<u>Beweis:</u>

Es sei $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$ .

Die Abbildung $K^n \times \dots \times K^n \longrightarrow K$

$$(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow \operatorname{Det}(x_1,\dots,x_k,a_{k+1},\dots,a_n)$$

ist eine alternierende Multilinearform. Nach der Formel (F) gilt:

$$\operatorname{Det}(a_1,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_n) =$$

$$= \sum_{\substack{\gamma=(j_1,\dots,j_n) \\ 1\le j_1<\dots<j_n\le n}} \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det}(e_j,\dots,e_j,a_{k+1},\dots,a_n).$$

Die Abbildung $\underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{(n-k)\text{-mal}} \longrightarrow K$

$$(x_{k+1},\dots,x_n) \longrightarrow \operatorname{Det}(e_{j_1},\dots,e_{j_k},x_{k+1},\dots,x_n)$$

ist eine alternierende Multilinearform. Nach der Formel (F) gilt:

$$\sum_{\substack{\gamma=(j_1,\dots,j_n) \\ 1\le j_1<\dots}} \operatorname{Det} A_{\gamma^*} \operatorname{Det}(e_{j_1},\dots,e_{j_k},a_{k+1},\dots,a_n) =$$

$$= \sum_{\substack{\gamma=(\dots) \\ 1\le j_1<\dots<j_n\le n}} \operatorname{Det} A_\gamma \Big(\sum_{\substack{\delta=(i_1,\dots,i_{n-k}) \\ 1\le i_1<\dots<i_{n-k}\le n}} \operatorname{Det} A_\delta \operatorname{Det}(e_{j_1},\dots,e_{j_k},e_{i_1},\dots,e_{i_{n-k}})\Big)$$

$$= \sum_{\substack{\gamma=(\dots) \\ 1\le j_1<\dots<j_n\le n}} \operatorname{Det} A_\gamma \operatorname{Det} A_{\gamma^*} \operatorname{Det}(e_{j_1},\dots,e_{j_k},e_{i_1},\dots,e_{i_{n-k}})$$

$$= \sum_{\substack{\gamma=(\dots) \\ 1\le j_1<\dots<j_n\le n}} \operatorname{sign}\gamma \operatorname{Det} A_\gamma \operatorname{Det} A_{\gamma^*}.$$

<u>Bemerkung:</u> Man spricht beim Lapalceschen Entwicklungssatz auch von der Entwicklung der Determinante nach ihren k ersten Zeilen.

Defintion 11.6

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(n,n)$. Seien $r,k \in \{1,\dots,n\}$.

$$A_{rk}^{*} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{r-1,1} & & & & & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & & & & & a_{r+1,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

heißt das algebraische Komplement von der Stelle r,k der Matrix A. Es entsteht aus A durch Weglassen der r-ten Zeile und k-ten Spalte.

Der Laplace'sche Entwicklungssatz für k = 1 (Entwicklung nach der 1-ten Zeile) lautet:

$$\operatorname{Det} A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{1i} \operatorname{Det} A_{1i}^{*}$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{r-1} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ri} \operatorname{Det} A_{ri}^{*} \qquad (\alpha)$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks verwendet man häufig folgende Definition:

Definition 11.7

$$(\operatorname{Adj} A)_{r,s} := (-1)^{r+s} \operatorname{Det} A_{rs}^{*}$$

$(\operatorname{Adj} A)_{r,s}$ heißt die Adjunkte von A bezüglich r,s.

Die Entwicklung nach der r-ten Zeile schreibt sich folgendermaßen: $\operatorname{Det} A = \sum_{s=1}^{n} a_{rs} (\operatorname{Adj} A)_{r,s}$.

Da $\operatorname{Det} A = \operatorname{Det} A^{T}$ ist, kann man die Determinante auch nach der r-ten Spalte entwicklen. Es gilt:

$$\operatorname{Det} A = \sum_{s=1}^{n} a_{sr} (\operatorname{Adj} A)_{s,r}.$$

Es gilt: $0 = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{is} A_{rs}^{*}$ für $i \neq r$, $\quad (\beta)$
denn für

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

$0 = \operatorname{Det} B = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+r} a_{is} B_{rs}^{*}$ (Entwicklung nach der r-ten Zeile). Aus $B_{rs}^{*} = A_{rs}^{*}$ folgt die Behauptung.

<u>Satz 11.10</u>

Sei $A \in \mathfrak{M}(n,n)$, $B = (b_{rs})$ wird definiert durch $b_{rs} = (\operatorname{Adj} A)_{r,s}$
Dann gilt: $\operatorname{Det} A \cdot E = A B^{\tau}$.

<u>Beweis:</u>

Aus den Formeln ($\alpha$) und ($\beta$) folgt:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\, b_{rs} = \delta_i^{r} \operatorname{Det} A .$$

<u>Folgerung:</u> Sei A eine reguläre Matrix, dann folgt aus der Eigenschaft 7.) der Determinante, daß $\operatorname{Det} A \neq 0$ ist. Der obige Satz impliziert dann:

$$A^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Det} A} B^{\tau} .$$

<u>Satz 11.11</u> (Cramersche Regel)

Es sei ein Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $\operatorname{Det} A \neq 0$ gegeben. Dann gibt es genau einen Lösungsvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$x_i = \frac{1}{\operatorname{Det} A} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Beweis:

1.) Aus Det $A \neq 0$ folgt, daß $A^{-1}$ existiert und es gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nach der Folgerung und der Formel für die Entwicklung der Determinante nach einer Spalte gilt:

$$x_i = \left(\frac{1}{\text{Det } A} \sum_{s=1}^{n} (\text{Adj})_{si}\, b_s\right) = \frac{1}{\text{Det } A} \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.) Wir geben noch einen direkten Beweis dieser Behauptung.

Das Gleichungssystem definiert folgende Linearkombination von Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

aus der für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ folgt:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + 1 \begin{pmatrix} a_{1i}x_i - b_1 \\ \vdots \\ a_{ni}x_i - b_n \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

Also sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1i}x_i - b_1 \\ \vdots \\ a_{ni}x_i - b_n \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

linear abhängig, was impliziert:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1i}x_i - b_1 \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{ni}x_i - b_n \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = x_i \text{Det}A \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} \cdots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Folgerung:</u> Aus dem 2. Beweis folgt, daß für ein lösbares Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $\operatorname{Det} A = 0$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ .

Dieses Resultat können wir auch mittels zweier wichtiger Sätze über lineare Gleichungssysteme erhalten.

<u>Satz 11.12</u>

Sei $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ und $b \in K^n$. Das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

<u>Beweis:</u>

Nach dem Satz 10.6 kann das System

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{matrix} = G$$

durch erlaubte Operationen in ein System L umgeformt werden, für welches mit Hilfe des Satzes 10.7 unsere Behauptung klar ist. Da sich andererseits der Rang einer Matrix bei erlaubten Operationen nicht ändert, gilt die Behauptung auch für G.

<u>Satz 11.13</u>

Der Rang einer Matrix $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ ist die größte Zahl p, für die eine quadratische p-reihige Untermatrix mit nichtverschwindender Determinante existiert.

Beweis:

Für $A = 0$ gilt die Behauptung; sei nun $A \neq 0$. Den Rang von $A$ bezeichnen wir mit $s$.

a) Sei

$$B = \begin{pmatrix} a_{j_1 i_1} & \cdots & a_{j_1 i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_k i_1} & & a_{j_k i_n} \end{pmatrix}$$

Untermatrix von $A$ mit $\operatorname{Det} B = 0$ und $\operatorname{Det} C = 0$ für alle Untermatrizen $C \in \mathfrak{M}(r,r)$ von $A$ mit $r > k$. Dann sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{1 i_1} \\ \vdots \\ a_{m i_1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1 i_k} \\ \vdots \\ a_{m i_k} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig. Also gilt $s = \operatorname{Rang} A \geqslant k$.

b) Seien die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{1 t_1} \\ \vdots \\ a_{m t_1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1 t_s} \\ \\ a_{m t_s} \end{pmatrix}$$

mit $t_1 < \ldots < t_s$ linear unabhängig. Da der Spaltenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{1 t_1} & \cdots & a_{1 t_s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m t_1} & \cdots & a_{m t_s} \end{pmatrix}$$

gleich ihrem Zeilenrang ist, gibt es Zahlen $q_1 < \ldots < q_s$, sodaß die Vektoren $(a_{q_1 t_1}, \ldots, a_{q_1 t_s})$ , ... , $(a_{q_s t_1}, \ldots, a_{q_s t_s})$ linear unabhängig sind. Es gilt damit:

$$\operatorname{Det} \begin{pmatrix} a_{q_1 t_1} & \cdots & a_{q_1 t_s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q_s t_1} & \cdots & a_{q_s t_s} \end{pmatrix} \neq 0$$

das heißt $s \leqslant k$ .

Nach dem ersten Satz folgt nunmehr aus der Lösbarkeit des Systems $A \cdot x = b$, daß

$$\text{Rang } A = \text{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

ist. Aus Det $A = 0$ folgt daher:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} < n.$$

Die Annahme, daß es ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ gibt mit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

führt mit dem zweiten Satz zu:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \geqslant n \; ;$$

das ist aber ein Widerspruch.