

Посвящается П. С. Александрову

УДК 513.83

МОДУЛЯРНАЯ ГРУППА ГИЛЬБЕРТА ПОЛЯ $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ И КУБИЧЕСКАЯ ДИАГОНАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КЛЕБША И КЛЕЙНА

Ф. Х и р ц е б р у х¹⁾

В этой работе мы устанавливаем изоморфизм между некоторой моделью модулярной поверхности, отвечающей определенной конгруэнцгруппе Γ модулярной группы Гильберта поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ с одной стороны, и известной кубической поверхностью, которую Клебш назвал диагональной [1], а Клейн [9] описал с помощью икосаэдра. Из этого изоморфизма вытекают теоремы о структуре кольца модулярных форм Гильберта для группы Γ и для полной модулярной группы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, которые сопоставляются с результатами Гундлаха [4] и Резникова [10]. По поводу общей теории модулярных форм Гильберта мы отсылаем читателя к работе [6] и цитированной там литературе.

Автор признателен Д. Цагиру за помощь в написании этой работы и математические консультации.

§ 1. Модулярная поверхность Гильберта Y_0

В поле $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ кольцо O целых чисел состоит из всех линейных комбинаций вида $a + b \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Формулы

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}, \frac{\alpha' z_2 + \beta'}{\gamma' z_2 + \delta'} \right) \quad (z_1, z_2 \in H \text{ — верхняя полуплоскость})$$

определяют действие модулярной группы Гильберта $SL_2(O)$ на H^2 ; здесь $x \mapsto x'$ — нетривиальный автоморфизм K . Простой идеал, порожденный

¹⁾ F. Hirzebruch, Die Hilbertsche Modulgruppe für $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und die kubische Diagonalfäche von Clebsch und Klein (ФРГ, Математический институт, Бонн). Перевод с немецкого выполнен Ю. И. Маниным.

2 в O , определяет главную конгруэнцгруппу $SL_2(O)$, которую мы обозначим Γ :

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(O) \mid \alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{2}, \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

Группа $\Gamma/\{\pm 1\}$ свободно действует на H^2 и фактор H^2/Γ является некомпактной поверхностью конечного объема относительно формы

$$\omega = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{dx_1 dy_1}{y_1^2} \frac{dx_2 dy_2}{y_2^2} \quad (z_j = x_j + iy_j),$$

нормированной так, что этот объем равен характеристике Эйлера — Пуанкаре:

$$e(H^2/\Gamma) = \int_{H^2/\Gamma} \omega$$

(вообще через $e(A)$ мы обозначаем характеристику Эйлера — Пуанкаре пространства A). Объем $H^2/SL_2(O)$ равен $2\zeta_K(-1) = \frac{1}{15}$. Фактор-группа $SL_2(O)/\Gamma$ изоморфна $SL_2(\mathbb{F}_4)$, ибо $O/2O \simeq \mathbb{F}_4$. Группа $SL_2(\mathbb{F}_4)$ в свою очередь изоморфна знакопеременной группе A_5 . Этот изоморфизм устанавливается посредством действия $SL_2(\mathbb{F}_4) = PGL_2(\mathbb{F}_4)$ на проективной прямой над \mathbb{F}_4 , содержащей как раз 5 точек. Таким образом,

$$(1) \quad e(H^2/\Gamma) = [SL_2(O) : \Gamma] \int_{H^2/SL_2(O)} \omega = |A_5| \cdot \frac{1}{15} = 4.$$

Пространство H^2/Γ компактифицируется добавлением 5 параболических точек. Так как число классов $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ равно единице, действие $SL_2(O)$ на $\mathbf{P}_1(K) = K \cup \{\infty\}$ имеет лишь одну орбиту, а действие Γ на $\mathbf{P}_1(K)$ — пять орбит. Точки $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta} \in \mathbf{P}_1(K)$ с $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in O$ и $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) = 1$ принадлежат одной орбите в точности тогда, когда $\alpha \equiv \gamma \pmod{2}$ и $\beta \equiv \delta \pmod{2}$, т. е. когда α/β и γ/δ редуцируются в одну и ту же точку на $\mathbf{P}_1(\mathbb{F}_4)$.

Компактификация H^2/Γ пятью точками обозначается $\overline{H^2/\Gamma}$. Это алгебраическая поверхность; добавленные пять точек на ней особые. Так как действие группы $SL_2(O)$ на H^2 индуцирует действие группы $A_5 \simeq SL_2(O)/\Gamma$ на $\overline{H^2/\Gamma}$, переставляющее 5 параболических точек, все они изоморфны. Поэтому достаточно изучить структуру особенности в $\infty = 1/0$. Стационарная подгруппа этой точки имеет вид

$$(2) \quad \Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \mid \varepsilon \text{ единица в } O, \varepsilon \equiv 1 \pmod{2}, \mu \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

Основная единица в O равна $\varepsilon_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ее образ порождает группу $(O/2O)^* \simeq \mathbb{F}_4^*$, которая циклична порядка 3. Поэтому

$$(3) \quad \Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \varepsilon_0^a & \mu \\ 0 & \varepsilon_0^{-a} \end{pmatrix} \mid \mu \equiv 0 \pmod{2}, a \equiv 0 \pmod{3} \right\}.$$

Структура любой параболической точки описывается в терминах группы

$$G(M, V) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \varepsilon \in V, \mu \in M \right\}$$

(см. [6], § 2), где M — некоторый \mathbf{Z} -подмодуль в K ранга 2, а V — бесконечная циклическая подгруппа вполне положительных единиц, переводящих при умножении этот модуль в себя. Вместо Γ можно воспользоваться группой $G(20, (U^2)^3)$, у которой тот же образ в $PGL_2(K)$. (Здесь U — группа всех единиц в K , так что U^2 — группа всех вполне положительных единиц.) Группа $G(20, (U^2)^3)$ сопряжена с группой $G(0, (U^2)^3)$ посредством элемента $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому параболическая точка, отвечающая группе Γ_∞ , изоморфна трехкратному накрытию параболической точки для $H^2/SL_2(0)$. Отсюда следует, что 5 особых точек поверхности $\overline{H^2/\Gamma}$ допускают в качестве разрешения циклическую конфигурацию трех неособых рациональных кривых с индексом самопересечения -3 (см. [6], § 2):

(4)

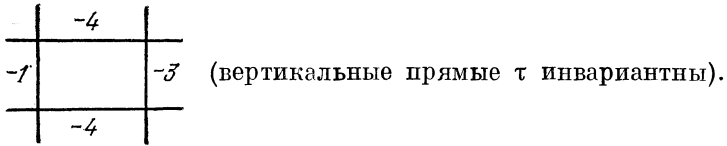
На поверхности Y_0 , получающейся из $\overline{H^2/\Gamma}$ разрешением пяти ее особых точек, имеется тем самым пять попарно не пересекающихся конфигураций вида (4). Структуру четырехмерного многообразия Y_0 можно описать следующим образом. Существует деформационная ретракция H^2/Γ на компактное многообразие X с границей, состоящей из пяти компонент. Каждая компонента является торическим расслоением над окружностью. Все компоненты изоморфны. Каждая конфигурация (4) обладает трубчатой окрестностью, граница которой изоморфна описанному торическому расслоению. Заклеив этими окрестностями границу X , мы получим многообразие Y_0 . Пользуясь аддитивностью эйлеровой характеристики e , формулой (1) и тем, что характеристика трубчатой окрестности равна 3, находим

(5)
$$e(Y_0) = e(X) + 5 \cdot 3 = e(H^2/\Gamma) + 15 = 19.$$

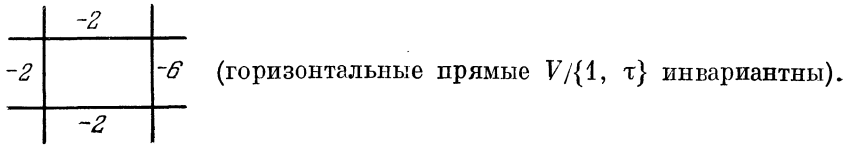
Укажем еще некоторые кривые на Y_0 . Образ диагонали $z_1 = z_2$ на H^2 является кривой в H^2/Γ , компактификация D которой в Y_0 алгебраична. Подгруппа Γ , переводящая в себя диагональ, совпадает с обычной главной конгруэнцподгруппой $\Gamma(2)$ модулярной группы $SL_2(\mathbf{Z})$. Фактор-группа $SL_2(\mathbf{Z})/\Gamma(2) \simeq SL_2(\mathbf{F}_2)$ изоморфна симметрической группе S_3 перестановок трех точек проективной прямой над \mathbf{F}_2 . Фактор-пространство $H/\Gamma(2)$ компактифицируется тремя параболическими точками $1/0 = \infty$, $0/1 = 0$ и $1/1 = 1$, которые отвечают трем точкам $\mathbf{P}_1(\mathbf{F}_2)$. Следовательно, кривая D пересекает разрешения трех параболических точек ∞ , 0 , 1 на $\overline{H^2/\Gamma}$, т. е. три конфигурации вида (4), в точности в одной точке каждую.

Описанное выше действие A_5 на $\overline{H^2/\Gamma}$ индуцирует некоторое действие на Y_0 . Подгруппа $S_3 = SL_2(\mathbf{Z})/\Gamma(2) \subset SL_2(0)/\Gamma = A_5$, переводящая D в себя, имеет индекс 10. Таким образом, орбита D на Y_0 состоит из 10 кривых. Мы

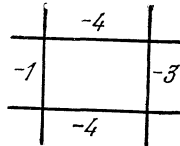
назовем их «диагоналями». Ясно, что каждая диагональ определяется тройкой параболических конфигураций, которые она пересекает, или парой, которые она не пересекает. Перенумеруем параболические точки $\infty, 0, 1, (1 + \sqrt{5})/2, (1 - \sqrt{5})/2$ номерами 0, 1, 2, 3, 4. Обозначим через D_{ij} ($0 \leq i, j \leq 4, i \neq j$) диагональ, не проходящую через i -ю и j -ю конфигурации (тем самым $D_{ij} = D_{ji}$). Опишем теперь, как кривые D_{ij} пересекают конфигурации (4), сведя задачу к соответствующему вопросу о диагонали на поверхности $H^2/SL_2(0) = (H^2/\Gamma)/A_5$. Так как A_5 транзитивно переставляет конфигурации (4), на каждой из них действует подгруппа, изоморфная A_4 , в которой имеется нормальный делитель Клейна $V = Z_2 \times Z_2$. Чтобы описать структуру фактора конфигурации (4) по A_4 , начнем с выбора нетривиальной инволюции $\tau \in V$. Можно проверить, что она переводит в себя одну из прямых и точку пересечения двух других прямых, которая является изолированной неподвижной точкой. Раздув ее, мы придем к конфигурации



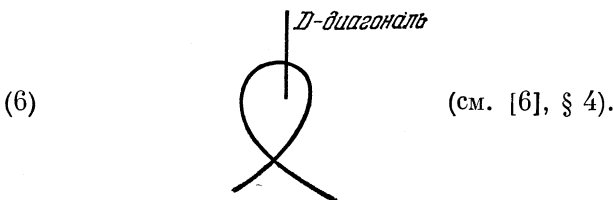
Факторизуя по инволюции τ , получим



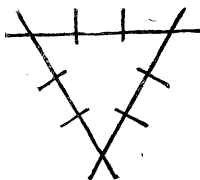
Следующая факторизация по $V/\{1, \tau\}$ дает



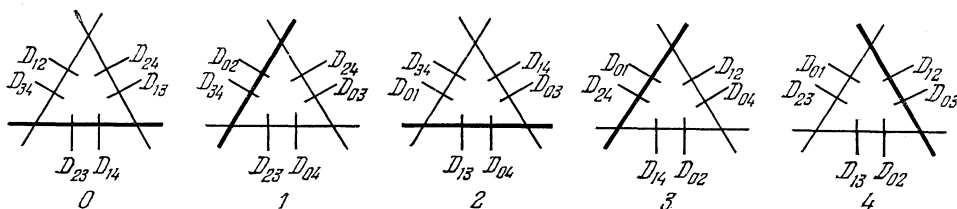
Стягивание (-1) -кривой возвращает нас к конфигурации (4). Иными словами, профакторизовав исходную особенность по группе V , мы получаем особенность, разрешаемую посредством той же конфигурации. Группа $A_4/V \simeq Z/3Z$ действует на ней циклически, и фактор изоморфен рациональной кривой с двойной точкой. Эта кривая является разрешением параболической точки на $H^2/SL_2(0)$. Образ диагонали $z_1 = z_2$ на неособой компактификации $H^2/SL_2(0)$ трансверсально проходит через вклеенную кривую:



Конфигурация (4) 12-кратно покрывает (6). Каждую конфигурацию (4) пересекают 6 диагоналей:



Группа A_4 действует на этой расширенной конфигурации, она транзитивна на множестве 6 диагоналей. Инволюция τ , переводящая в себя одну из прямых конфигурации (4), переводит в себя две пересекающиеся эту прямую диагонали, а на остальных четырех индуцирует инволюцию без неподвижных точек. Из соображений симметрии следует, что для любых индексов $\{i, j, k, l, m\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ прямые D_{ij} и D_{kl} пересекают одну и ту же компоненту в разрешении m -й параболической точки, а D_{ij} и D_{ik} пересекают разные компоненты разрешений l -й и m -й точек. Полная конфигурация, состоящая из разрешений параболических точек и диагоналей, устроена так:



$$(7) \left\{ \begin{array}{l} (10 \text{ неособых рациональных кривых } D_{ij} \text{ с индексом самопересечения } -1, \text{ попарно непересекающихся; } \\ 15 \text{ неособых рациональных кривых с индексом самопересечения } -3, \text{ образующих } 5 \text{ треугольников и трансверсально пересекающихся} \\ \text{с двумя из кривых } D_{ij} \text{ каждая).} \end{array} \right.$$

Кривые, выделенные жирно на чертеже, дальше будут играть особую роль. Мы должны еще проверить некоторые из утверждений (7). В H^2/Γ каждая диагональ неособа и две разные диагонали не пересекаются: действительно, нетрудно убедиться, что две кривые, эквивалентные диагонали $z_1 = z_2$ относительно $SL_2(0)$, не могут пересекаться на H^2 (ср. [7], 3.4, или [8]). Характеристика Эйлера — Пуанкаре поверхности $H/\Gamma(2)$ равна нормированному объему, т. е. -1 ; объем $H/Sh_2(\mathbb{Z})$ равен $-\frac{1}{6}$. Далее, $D_{ij} \simeq H/\Gamma(2) \cup \cup \{3 \text{ точки}\}$ и $e(D_{ij}) = 2$. Следовательно, D_{ij} — рациональная кривая. В Y_0 она не имеет особенностей, ибо пересекает компоненты разрешения параболических точек трансверсально. Ее индекс самопересечения равен -1 , как явствует из формулы (19), [6], 4.3. В нашем случае эта формула применима в том виде, в каком написана, и пользуясь ею, находим $c_1[D_{ij}] = 1$, где c_1 — первый класс Чженя Y_0 . После этого индекс самопересечения получается из формулы присоединения.

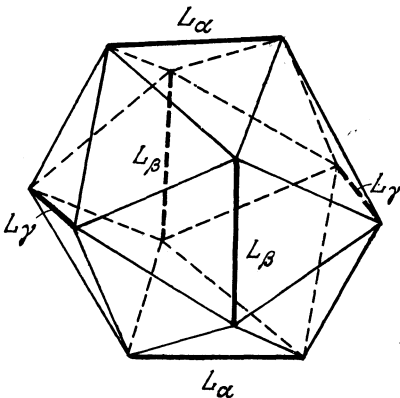
В заключение этого раздела напомним, что поверхность Y_0 регулярна, т. е. ее первое число Бетти равно нулю (см. [11]). Этим мы воспользуемся в § 2, чтобы отождествить Y_0 с другой известной алгебраической поверхностью.

§ 2. Икосаэдрическая поверхность Клейна Y_1 и диагональная поверхность Клебша Y_2

Обозначим через $I \subset \mathbf{R}^3$ икосаэдр, 12 вершин которого лежат на единичной сфере S^2 . Этим 12 точкам отвечают 6 точек на $S^2/\{\pm 1\} = \mathbf{P}_2(\mathbf{R})$. Далее, 20 центров граней I (т. е. вершин двойственного к I додекаэдра I^*) определяют 10 точек $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$. Итого мы получили 16 точек на $\mathbf{P}_2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$. Обозначим через Y_1 поверхность, которая получается из $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ раздутием этих 16 точек.

Эйлерова характеристика Y_1 , очевидно, равна $e(\mathbf{P}_2(\mathbf{C})) + 16 = 19$.

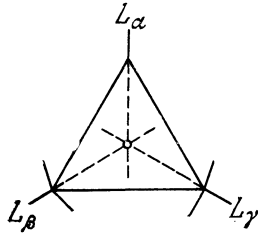
Всякая пара противоположных ребер I определяет большой круг на S^2 и соответствующую ему прямую в $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$. Прообраз в Y_1 ее комплексификации в $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ является некоторой алгебраической кривой. Обозначим соответствующие 15 кривых символами L_α ($\alpha = 1, \dots, 15$). Если две кривые L_α, L_β происходят из ребер, выходящих из общей вершины I , то на Y_1 эти кривые не пересекаются, так как мы раздуваем эту вершину. Следовательно, L_α и L_β пересекаются, лишь если соответствующие ребра I в \mathbf{R}_3 лежат на скрещивающихся прямых. Отсюда следует, что 15 кривых L_α разделяются на 5 групп по 3 кривые в каждой, пересекающихся попарно в одной точке. Иными словами, как было известно уже древним грекам, куб можно описать вокруг икосаэдра пятью разными способами.



(На чертеже выделены три пары ребер I , отвечающие тройке попарно пересекающихся кривых $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma$ на Y_1 . Три точки попарных пересечений отвечают шести серединам выделенных ребер.)

Таким образом, 15 кривых L_α образуют конфигурацию из 5 попарно непересекающихся треугольников. Все эти кривые рациональны и имеют индекс самопересечения -3 (каждая кривая является прообразом прямой на проективной плоскости; на этой прямой раздуваются четыре точки). Наконец, каждая из 10 кривых на Y_1 , получающихся как прообразы раздутых вершин I^* , пересекает ровно три из кривых L_α , причем эти три кривые при-

надлежат *различным* «треугольникам». Действительно, через центр каждой грани I проходят три (продолжения) ребер I : Легко убедиться, что эти 10

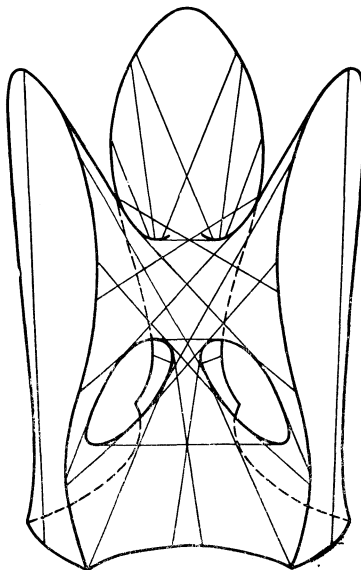


кривых с индексом самопересечения -1 и 15 кривых L_α с индексом -3 образуют конфигурацию, изоморфную (7).

Итак, мы построили компактную поверхность Y_1 с той же эйлеровой характеристикой, что и у модулярной поверхности Гильберта Y_0 , и с той же довольно сложной конфигурацией кривых на ней. Естественно задаться вопросом, не изоморфны ли Y_0 и Y_1 . Прежде чем отвечать на этот вопрос, опишем еще одну классическую конструкцию, приводящую к поверхности с такими же свойствами. Мы будем исходить из кубической поверхности, изученной Клебшем [1], которая называется «диагональной» по виду задающих ее уравнений:

$$(8) \quad F = \{x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbf{P}_4(\mathbf{C}) \mid \sum_{i=0}^4 x_i = 0, \sum_{i=0}^4 x_i^3 = 0\}.$$

На чертеже показана модель этой поверхности в \mathbf{R}^3 (точнее, модель части ее аффинных вещественных точек) с прорисованными 27 прямыми. Этот чертеж сделан на основе гипсовой модели из собрания Гейдельбергского математического института. Модель была заказана самим Клебшем; один экземпляр был показан Клейном на международной выставке 1894 г. в Чикаго [5].



Сечение F гиперплоскостью $x_0 = 0$ состоит из 3 прямых:

$$(9) \quad \begin{cases} \{x \in \mathbf{P}_4(\mathbf{C}) \mid x_0 = 0, x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}, \\ \{x \in \mathbf{P}_4(\mathbf{C}) \mid x_0 = 0, x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}, \\ \{x \in \mathbf{P}_4(\mathbf{C}) \mid x_0 = 0, x_1 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}, \end{cases}$$

каждая пара которых пересекается в одной точке (например, первые две в точке $(0:1:-1:-1:1)$). Аналогично устроены пересечения с остальными гиперплоскостями $x_j = 0$. Так получается 15 прямых на F (из 27, лежащих на ней), естественно разбивающихся на 5 «треугольников». Разные «треугольники», однако, могут иметь общие точки; таких точек 10, обозначим через $P_{ij} = P_{ji}$ ($0 \leq i, j \leq 4, i \neq j$) точку $x_i = -x_j, x_k = 0$ ($k \neq i, j$). В точке P_{ij} пересекаются ровно 3 из 15 прямых. Обозначим через Y_2 поверхность, получающуюся в результате раздутия 10 точек P_{ij} на F . Эйлера характеристика кубической поверхности F равна 9, поэтому $e(Y_2) = 9 + 10 = 19$. Будем называть Y_2 также диагональной поверхностью. На Y_2 лежат 15 кривых с индексом самопересечения -3 (каждая прямая типа (9) имеет индекс самопересечения -1 на F и проходит через две из точек P_{ij}). Эти кривые образуют конфигурацию из 5 треугольников. Добавляя к ним 10 кривых D_{ij} с индексом самопересечения -1 , прообразы раздутых точек, мы получаем конфигурацию, изоморфную (7). Тем самым мы построили еще одну поверхность со свойствами, аналогичными Y_0 и Y_1 .

Т е о р е м а 1. *Существует единственная с точностью до изоморфизма неособая регулярная алгебраическая поверхность с эйлеровой характеристикой 19, на которой лежит конфигурация кривых типа (7). В частности, модулярная поверхность Гильберта Y_0 , икосаэдрическая поверхность Клейна Y_1 и диагональная поверхность Клебша Y_2 изоморфны.*

План доказательства состоит в следующем. Пусть Y — поверхность со свойствами, перечисленными в условии теоремы. Обозначим через Y' поверхность, которая получается стягиванием 10 исключительных кривых D_{ij} на Y и через Y'' — поверхность, которая получается дальнейшим стягиванием кривых, выделенных жирно на чертеже (7) (они остаются попарно непересекающимися после стягивания D_{ij} , а их индекс самопересечения становится равным -1). Мы установим следующие факты:

а) Поверхность Y'' изоморфна $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

б) Этот изоморфизм можно выбрать так, что 5 точек на Y'' , в которые стягиваются отмеченные кривые (7), будут иметь координаты

$$(10) \quad (0, 0), (1, 1), (\infty, \infty), (-\varepsilon'_0, -\varepsilon_0), (\varepsilon_0, \varepsilon'_0) \quad \left(\varepsilon_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

на $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

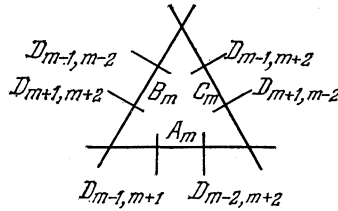
Этими свойствами поверхность Y' определена однозначно, и ее можно реализовать как кубическую поверхность с 10 точками Эккардта (в которых пересекаются три прямых, лежащих на поверхности).

с) Поверхность Y получается из Y' раздутием всех точек Эккардта.

Из утверждения с) следует, что поверхности Y и Y' однозначно восстанавливаются друг по другу, так что безразлично, какую из них рассма-

тривать. Клебш рассматривал поверхность $Y'_2 = F$, а Клейн — поверхность Y'_1 (т. е. $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ с раздутыми 6 точками, вершинами I), и Клейн установил [9] изоморфизм $Y'_1 = Y'_2$.

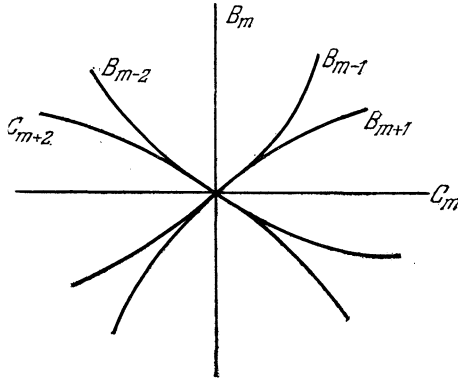
Считая, что номер m параболической точки принимает значения $\text{mod } 5$, перенумеруем кривые в ее разрешении, как показано на чертеже:



Через A_m обозначены кривые, выделенные на чертеже (7). После стягивания всех кривых D_{ij} и A_m оставшиеся 10 кривых B_m, C_m будут пересекаться следующим образом:

I) индексы самопересечения будут равны $+2$;

II) в точке $\bar{A}_m \in Y''$, образе A_m , пересекаются 6 кривых; пары (B_{m-1}, B_{m+1}) и (C_{m-2}, C_{m+2}) касаются с кратностью 2, остальные пересечения трансверсальны.



III) B_m и C_m пересекаются еще в одной точке.

Предположим теперь, что мы уже заказали утверждение а): $Y'' \simeq \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Поскольку индексы самопересечения кривых B_m и C_m равны 2, они являются «сферами» на $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, т. е. графиками дробно-линейных преобразований $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Имеется всего 10 таких кривых, проходящих через три из пяти точек \bar{A}_m . Пять точек $\bar{A}_m \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ определяются следующим условием. Обозначим через B_m ($m \in \mathbf{Z}/5\mathbf{F}$) однозначно определенную сферу, проходящую через \bar{A}_{m-1}, A_m и \bar{A}_{m+1} . Тогда для любого m сферы B_{m-1} и B_m пересекаются в точке \bar{A}_m . Выбрав подходящую систему проективных координат в каждом из сомножителей $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, мы можем считать, что $\bar{A}_0 = (0, 0)$, $\bar{A}_1 = (1, 1)$, $\bar{A}_2 = (\infty, \infty)$. Легкое вычисление показывает, что тогда $\bar{A}_3 = (-\varepsilon'_0, -\varepsilon_0)$ и $\bar{A}_4 = (\varepsilon_0, \varepsilon'_0)$

(или в обратном порядке). Отсюда следует утверждение *b*) и однозначная определенность поверхности Y' с точностью до изоморфизма. Сверх того, $Y' = Y'_2 = F$ и 10 раздуваемых точек на Y' совпадают с 10 точками Экардта на F .

Тем самым доказано и утверждение *c*).

Приступим теперь к доказательству *a*). Так как Y' — регулярная поверхность с парой пересекающихся исключительных кривых (например, B_0 и C_0), она рациональна, вместе с ней рациональна и Y'' . Поскольку $e(Y'') = 4$, из результатов грубой классификации алгебраических поверхностей следует, что Y'' должна совпадать с одной из линейчатых поверхностей Σ_k ($k \geq 0$). Напомним, что Σ_k есть расслоение над $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ со слоем $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ и структурной группой \mathbf{C}^* , на котором имеется два непересекающихся сечения S_0 и S_∞ с индексами самопересечения k и $-k$ соответственно. Обозначим через E один из слоев Σ_k . Классы гомологий S_0 и E образуют базис группы гомологий $H_2(\Sigma_k, \mathbf{Z})$ и в этой группе

$$E^2 = 0, ES_0 = 1, S_0^2 = k, S_\infty \sim S_0 - kE.$$

Из существования на Y' неприводимой кривой с индексом самопересечения 2 (например, B_0) легко следует, что $k = 0$ или 2. Действительно, пусть

$$B_0 \sim \alpha S_0 + \beta E \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{Z}).$$

Кривая B_0 не совпадает ни с S_∞ , ни с E , поэтому $\alpha = B_0 E \geq 0$ и $\beta = B_0 S_\infty \geq 0$. Но диофантово уравнение

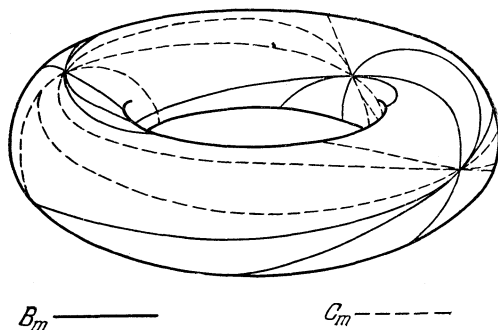
$$2 = B_0^2 = k\alpha^2 + 2\alpha\beta$$

имеет решения $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ лишь при $k = 0$ и $k = 2$, причем единственное решение при $k = 2$ есть $\alpha = 1, \beta = 0$. Поверхность Σ_0 изоморфна $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Поэтому остается исключить случай $Y'' \simeq \Sigma_2$. Но в этом случае все кривые B_m и C_m должны быть гомологичны S_0 и поэтому не пересекаться с S_∞ .

Заметим, что отсюда уже следует изоморфизм $Y_0 \simeq Y_2$, ибо возможность $Y'' \simeq \Sigma_2$ для этих поверхностей исключена. Действительно, если бы кривая S_∞ не пересекалась со всеми B_m, C_m , то S_∞ на Y лежала бы в дополнении к конфигурации (7). Для $Y = Y_2$ это невозможно, ибо это дополнение лежит в аффинном пространстве. Для $Y = Y_0$ дополнение к (7) лежит в H^2/Γ . Кривая S_∞ , будучи односвязной, не может лежать в $H^2 \setminus \Gamma$, ибо иначе ее можно было бы поднять на универсальное накрытие H_2 .

То, что $Y'' \not\simeq \Sigma_2$, можно доказать следующим образом. Поверхность $\Sigma_2 = S_\infty$ является расслоением на аффинные прямые над $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ с характеристическим числом 2, сечения которой задаются квадратичными формами от двух переменных. Кривые B_m ($m \in \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$) определяют 5 таких сечений. Точно так же, как в случае $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, можно вычислить координаты точек пересечения \bar{A}_m кривых B_m в подходящей системе. Это вычисление, определившее выше точки \bar{A}_m однозначно, в разбираемом здесь случае приведет к противоречию.

Расположение 10 кривых B_m, C_m на $Y'' = \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ выглядит на вещественной модели $\mathbf{P}_1(\mathbf{R}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ следующим образом:



§ 3. Кольцо модулярных форм

В § 2 мы отождествили модулярную поверхность Y_0 с поверхностью Y_2 , которая получается из кубической поверхности F раздутием 10 точек Эккардта P_{ij} . Сейчас мы воспользуемся этим результатом для получения информации о модулярных формах относительно группы Γ . Модулярные формы веса 2 отвечают сечениям канонического расслоения на Y_0 . Рассмотрим сначала сечения канонического расслоения K на F . Этот пучок K изоморфен ограничению на F расслоения Хопфа

$$(11) \quad H = ((\mathbf{C}^5 - \{0\}) \times \mathbf{C})/\mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{P}_4(\mathbf{C}).$$

Здесь $t \in \mathbf{C}^*$ действует на \mathbf{C}^5 как умножение на t , а на \mathbf{C} — как умножение на t^{-1} . Это утверждение есть частный случай известного общего результата, согласно которому каноническое расслоение гиперповерхности степени d в $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ изоморфно H^{n+1-d} (здесь $n = 3, d = 3$). Для $k = 0, \dots, 4$ отображение

$$\mathbf{C}^5 \rightarrow (\mathbf{C}^5 - \{0\}) \times \mathbf{C}, \quad (x_0; \dots; x_4) \rightarrow ((x_0, \dots, x_4), x_4^{-1}),$$

определенное на дополнении к гиперплоскости $x_k = 0$, перестановочно с действием \mathbf{C}^* в (11). Поэтому оно определяет мероморфное сечение H , ограничение которого на F мы обозначим через u_k . Однородный многочлен от u_k степени r определяет сечение расслоения K^r . Из уравнений (8), определяющих поверхность F , следуют соотношения

$$(12) \quad \sigma_4(u_0, \dots, u_4) = 0, \quad \sigma_2(u_0, \dots, u_4) = 0,$$

где σ_j — j -я элементарная симметрическая функция.

Векторное пространство голоморфных сечений расслоения $H|_F$ изоморфно пространству голоморфных дифференциальных форм степени 2 на F . Этот изоморфизм определен однозначно с точностью до ненулевого множителя; мы выберем и фиксируем его. Сечения u_k тогда отождествляются с дифференциальными формами на F , поэтому их можно рассматривать так же, как форму на Y_2 или сечение канонического расслоения K' на Y_2 . Эти сечения K' мы по-прежнему обозначаем u_k . Они также удовлетворяют

соотношениям (12). Дивизор u'_k сечения u_k на Y_2 определяется равенством

$$(13) \quad U'_k = \pi^*U_k + \sum_{0 \leq i < j \leq 4} D_{ij},$$

где U_k — дивизор u_k на F , $\pi: Y_2 \rightarrow F$ — естественное отображение, D_{ij} — кривая, получающаяся в результате раздутия P_{ij} (она же соответствует «диагонали» D_{ij} на Y_0 ср. (7)). Дивизор U_k на F есть гиперплоское сечение $x_k = 0$ поверхности F с коэффициентом -1 , состоящее из трех прямых (ср. (9)). Кривые на Y_2 , соответствующие этим прямым, образуют стороны одного из «треугольников» диаграммы (7). Как в § 2, мы обозначим их A_k, B_k, C_k . Так как точки Экардта P_{ij} ($i, j \neq k$) лежат в сечении $x = 0$, отсюда находим $\pi^*U_k = -(A_k + B_k + C_k) - \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq 4 \\ i, j \neq k}} D_{ij}$ и, в силу (13),

$$(14) \quad U'_k = -(A_k + B_k + C_k) + \sum_{\substack{0 \leq i \leq 4 \\ i \neq k}} D_{ik}.$$

Мы можем рассматривать u_k также, как мероморфное сечение канонического расслоения Y_0 , или как мероморфную дифференциальную форму степени 2, голоморфную вне разрешения k -й параболической точки и обращающуюся в нуль на объединении четырех диагоналей, не проходящих через эту точку. Фактор-пространство H^2/Γ отождествляется с дополнением к $\bigcup_i (A_i \cup B_i \cup C_i)$

в Y_0 . Поэтому на нем u_k определяет голоморфную дифференциальную форму, дивизор нулей которой проходит через четыре параболические точки, или же гильбертову модулярную форму веса 2 относительно группы Γ , обращающуюся в нуль в четырех параболических точках. В пятой, т. е. k -й, точке эта форма голоморфна, но отлична от нуля, ибо компоненты ее разрешения входят в U'_k , с кратностью -1 (ср. [6], 3.6, доказательство леммы). С другой стороны, имеется 5 рядов Эйзенштейна E_k , обращающихся в 1 в одной (k -й) параболической точке и в нуль в остальных. Например,

$$E_0(z_1, z_2) = \sum'_{\substack{c, d \in \mathbb{Z} \\ (c, d) = 1 \\ c \equiv 0 \pmod{2}, d \equiv 1 \pmod{2}}} \frac{1}{(cz_1 + d)^2 (c'z_2 + d')^2},$$

где штрих означает, что суммирование производится по представителям по модулю группы U^3 единиц $\varepsilon \equiv 1 \pmod{2}$. Ряд не является абсолютно сходящимся и суммируется известным методом Гекке. Так как поверхность Y_0 рациональна и, значит, имеет геометрический род нуль, параболических форм веса 2 относительно Γ не существует (ср. цитированную выше лемму из [6]). Отсюда следует, что пять гильбертовых модулярных форм, отвечающих сечениям u_k , пропорциональны рядам Эйзенштейна E_k . Это позволит нам установить следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Градуированное кольцо гильбертовых модулярных форм четного веса относительно группы Γ совпадает с кольцом многочленов от пяти рядов Эйзенштейна E_0, \dots, E_4 , удовлетворяющих только соотношениям*

$$(15) \quad \sigma_2(E_0, \dots, E_4) = 0, \quad \sigma_4(E_0, \dots, E_4) = 0$$

и их следствиям.

Доказательство. Обозначим это кольцо модулярных форм через $M(\Gamma) = \bigoplus M_{2r}(\Gamma)$. Из предшествующего ясно, что ряды $E_k \in M_2(\Gamma)$ удовлетворяют только соотношениям (15) и их следствиям, ибо эти соотношения в точности порождают идеал поверхности Клебша F (8). С другой стороны, согласно Шмицу, размерность $M_{2r}(\Gamma)$ равна

$$\dim M_{2r}(\Gamma) = \begin{cases} 5 & \text{при } r = 1, \\ 4r^2 - 4r + 6 & \text{при } r \geq 2 \end{cases}$$

(ср. [6], 3.6, теорема). Так как она совпадает с $\dim(\mathbb{C}[E_0, \dots, E_4]/\sigma_2 = \sigma_4 = 0)$, отсюда следует теорема.

В качестве следствия из нее мы можем определить также структуру градуированного кольца $M(SL_2(O))$ модулярных форм четного веса относительно полной модулярной группы Гильберта. Действительно, $SL_2(O)/\Gamma \simeq A_5$, где группа A_5 при отождествлении $Y_0 \simeq Y_2$ действует перестановками координат x_i . Поэтому $M(SL_2(O)) = M(\Gamma)^{A_5} = (\mathbb{C}[E_0, \dots, E_4]/\sigma_2 = \sigma_4 = 0)^{A_5}$, где A_5 переставляет E_k . Но $\mathbb{C}[E_0, \dots, E_4]^{A_5} = \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \Delta]/\Delta^2 = F(\sigma_1, \dots, \sigma_5)$, где $\Delta = \prod_{i < j} (E_i - E_j)$, а F — известный многочлен. (В этих формулах E_k рассматриваются как независимые переменные, а σ_j означает j -ю элементарную симметрическую функцию от E_k .) Поэтому

$$M(SL_2(O)) = \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \Delta]/\Delta^2 = F(\sigma_1, 0, \sigma_3, 0, \sigma_5).$$

Многочлен $F(\sigma_1, 0, \sigma_3, 0, \sigma_5)$ вычислен в [2] (ср. 378, сноска). Это дает

С л е д с т в и е 1. Кольцо $M(SL_2(O))$ порождено четырьмя модулярными формами $\sigma_1 = \sum_{0 \leq i \leq 4} E_i$, $\sigma_3 = \sum_{0 \leq i < j < k \leq 4} E_i E_j E_k$, $\sigma_5 = \sum E_i^5$, $\Delta = \prod_{0 \leq i < j \leq 4} (E_i - E_j)$ весов 2, 6, 10 и 20 соответственно, с единственным соотношением

$$(16) \quad \Delta^2 = \sigma_5 (3125\sigma_3^3 + 2000\sigma_5^2\sigma_3\sigma_1^2 + 256\sigma_5^2\sigma_1^5 - 900\sigma_5\sigma_3^3\sigma_1 - 128\sigma_5\sigma_3^2\sigma_1^4 + 16\sigma_3^4\sigma_1^3 + 108\sigma_5^5).$$

Аналогичное вычисление структуры кольца

$$M_2(\Gamma)^{S_5} = \mathbb{C}[E_0, \dots, E_4]^{S_5}/(\sigma_2 = \sigma_4 = 0) = \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5]$$

можно интерпретировать как утверждение о том, что кольцо симметричных модулярных форм (т. е. форм с условием $f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1)$) свободно порождено формами $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5$, что установил Гундлах ([4], теорема 3).

В заключение сделаем несколько замечаний относительно модулярных форм нечетного веса относительно групп Γ и $SL_2(O)$. Дивизор $x_i + x_j$ на поверхности Клебша состоит из трех прямых, проходящих через точку P_{ij} . Рассуждение, аналогичное приведенному в начале этого пункта, показывает, что дивизор формы $E_i + E_j$ (т. е. $\frac{x_i + x_j}{x_i x_j}$) на Y равен сумме $4D_{ij}$ и некоторой линейной комбинации 15 компонент разрешения особенностей (точнее, сумма 6 кривых над i -й и j -й параболической точкой с коэффициентом -1 и трех кривых над остальными точками, проходящих через D_{ij} , с коэффициентом $+1$). Значит, функция $E_i(z_1, z_2) + E_j(z_1, z_2)$ на H^2 является четвертой степенью некоторой функции θ_{ij} , которая под действием Γ пре-

образуется как модулярная форма веса $1/2$ и имеет в качестве дивизора нулей прообраз D_{ij} с кратностью 1. Эти функции θ_{ij} совпадают с тэта-рядами, которые исследовали Гетцки [3] и Гундлах [4]. Из формального тождества

$$(17) \quad \prod_{\substack{0 \leq i \leq 4 \\ i \neq k}} (E_k + E_i) = E_k^4 + \sigma_2 E_k^2 + \sigma_4$$

следует, например, тождество $\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}\theta_{04} = E_0$. Перемножив уравнения (17) по $k = 0, 1, 2, 3, 4$, редуцировав результат по модулю (σ_2, σ_4) и извлекая квадратный корень, находим $\prod_{0 \leq i < j \leq 4} (E_i + E_j) \equiv -\sigma_5^2 \pmod{(\sigma_2, \sigma_4)}$. Поэтому

произведение $\theta = \prod_{0 \leq i < j \leq 4} \theta_{ij}$ удовлетворяет соотношению $\theta^2 = \pm i\sigma_5$.

Функция θ является параболической формой веса 5 для группы $SL_2(0)$, которая рассмотрена в работе [5]. Из (16) следует, что ω делится на θ , а частное Δ/θ с точностью до постоянного множителя совпадает с параболической формой веса 15 относительно $SL_2(0)$, которая в работе [4] обозначена H , а в работе [10] χ_{15} . Кольцо модулярных форм относительно группы $SL_2(0)$, согласно Гундлаху [4] (теоремы 5, 8, 9, 10), порождено формами $\sigma_1, \sigma_3, \theta, \Delta/\theta$, связанными единственным соотношением. Это соотношение вычислил Резников, и оно должно совпасть с нашим соотношением (16) после деления на θ^2 . Действительно, соотношение Резникова ([10], теорема 3) переходит в (16), если выразить его функции $\varphi_2, \chi_5, \chi_6, \chi_{15}$ через наши по формулам

$$\sigma_1 = \varphi_2, \quad \sigma_3 = -2^7 \chi_6, \quad \sigma_5 = 2^{12} (\chi_5^-)^2, \quad \Delta = \pm 2^{24} \chi_5^- \chi_{15}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Clebsch, Über die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5^{ten} Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfeits, Math. Ann. 4 (1871), 284—345.
- [2] H. Cohn, Numerical study of quintics of small discriminant, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 377—385.
- [3] F. Götzky, Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunctionen zweier Veränderlicher, Math. Ann. 100 (1928), 411—437.
- [4] K.-B. Gundlach, Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, Math. Ann. 152 (1963), 226—256.
- [5] A. Henderson, The twenty-seven lines upon the cubic surface, Hafner Publishing Co., New York, 1911.
- [6] F. Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, L'Enseignement Math. 19 (1973).
- [7] F. Hirzebruch und D. Zagier, Classification of Hilbert modular surfaces, Erscheint demnächst.
- [8] F. Hirzebruch und D. Zagier, Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus, Erscheint demnächst.
- [9] F. Klein, F., Zusatz II zu der Arbeit: Über Flächen dritter Ordnung (Math. Ann. 6 (1873)) in Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band, Springer-Verlag, Berlin 1922 (Reprint 1973), 56—62.
- [10] H. L. Resnikoff, On the graded ring of Hilbert modular forms associated with $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, Math. Ann. 208 (1974), 161—170.
- [11] О. В. Шварцман, Односвязность фактор-пространства модулярной группы Гильберта, Функц. анализ 8:2 (1974), 99—100.

Поступило в редакцию 25 мая 1976 г.