Die Hilbertsche Modulgruppe für $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und die kubische Diagonalfläche von Clebsch und Klein

F. Hirzebruch

In dieser Arbeit beweisen wir die Isomorphie zwischen einem bestimmten Modell einer Modulfläche, die zu einer gewissen Kongruenzuntergruppe Γ der Hilbertschen Modulgruppe für $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ gehört, und einer berühmten kubischen Fläche, nämlich der Clebschschen Diagonalfläche [1], die von Klein [9] mittels des Ikosaeders beschrieben wurde. Aus dieser Isomorphie folgen Sätze über die Struktur des Ringes der Hilbertschen Modulformen für Γ und für die ganze Hilbertsche Modulgruppe für $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, die mit den Ergebnissen von Gundlach [4] und Resnikoff [10] verglichen werden. Für die allgemeine Theorie der Hilbertschen Modulflächen werde auf [6] und die dort angegebene Literatur verwiesen.

Der Verfasser möchte D. Zagier für seine Hilfe beim Aufschreiben dieser Arbeit und bei einigen mathematischen Fragen danken.

§1. Die Hilbertsche Modulfläche Y_0

Im Körper $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ besteht der Ring $\underset{\sim}{O}$ der ganzen Zahlen aus allen Linearkombinationen $a+b\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mit $a,b\in\mathbb{Z}$. Durch

$$(z_1,z_2)\longmapsto\left(\frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta},\ \frac{\alpha' z_2+\beta'}{\gamma' z_2+\delta'}\right)\qquad(z_1,z_2\in H=\text{obere Halbebene})$$

wird die Operation der Hilbertschen Modulgruppe $SL_2(\underset{\sim}{O})$ auf H^2 erklärt, dabei ist $x\mapsto x'$ der nicht-triviale Automorphismus von K. Zu dem von 2 im Ring $\underset{\sim}{O}$ erzeugten Primideal gehört eine Hauptkongruenzuntergruppe von $SL_2(\underset{\sim}{O})$, die mit Γ bezeichnet werden soll:

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in SL_2(\underset{\sim}{O})\ \middle|\ \alpha\equiv\delta\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\quad \beta\equiv\gamma\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\}.$$

Die Gruppe $\Gamma/\{\pm 1\}$ operiert frei auf H^2, und H^2/Γ ist eine nicht-kompakte Fläche mit endlichem Volumen bezüglich des Volumenelements

$$\omega=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{dx_1dy_1}{y_1^2}\ \frac{dx_2dy_2}{y_2^2}\qquad(z_j=x_j+iy_j),$$

welches so normiert ist, daß das Volumen gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik ist:

SFB Theoretische Mathematik, Bonn, Mai 1976

$$e(H^2/\Gamma) = \int_{H^2/\Gamma} \omega \ .$$

(Dabei wird mit $e(A)$ die Euler-Poincarésche Charakteristik eines Raumes A bezeichnet.) Das Volumen von $H^2/SL_2(\underline{O})$ ist gleich $2\zeta_K(-1)$ und dieser Wert ist $\frac{1}{15}$. Die Faktorgruppe $SL_2(\underline{O})/\Gamma$ ist zu $SL_2(F_4)$ isomorph, weil $\underline{O}/2\underline{O} \simeq F_4$. Die Gruppe $SL_2(F_4)$ wiederum ist zur alternierenden Gruppe A_5 isomorph, und zwar stellt die Operation von $SL_2(F_4) = PGL_2(F_4)$ auf der projektiven Geraden über F_4, welche 5 Punkte hat, den Isomorphismus zwischen $SL_2(F_4)$ und der Permutationsgruppe A_5 dar. Also ist

$$(1) \qquad e(H^2/\Gamma) = [SL_2(\underline{O}):\Gamma] \int_{H^2/SL_2(\underline{O})} \omega = |A_5| \cdot \frac{1}{15} = 4 \ .$$

Der Raum H^2/Γ ist durch 5 Spitzen zu kompaktifizieren: Da die Klassenzahl von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ gleich eins ist, hat die $SL_2(\underline{O})$-Aktion auf $P_1(K) = K \cup \{\infty\}$ nur einen Orbit, dagegen hat die Aktion der Gruppe Γ auf $P_1(K)$ fünf Orbiten, und zwar gehören die Elemente $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta} \in P_1(K)$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \underline{O}$ und $(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) = 1$ genau dann zum gleichen Orbit, wenn $\alpha \equiv \gamma \pmod 2$ und $\beta \equiv \delta \pmod 2$, d.h. wenn $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ den gleichen Punkt von $P_1(F_4)$ repräsentieren.

Die durch 5 Punkte kompaktifizierte Fläche H^2/Γ werde mit $\overline{H^2/\Gamma}$ bezeichnet. Sie ist eine algebraische Fläche mit 5 singulären Punkten, die den 5 Spitzen entsprechen. Da die Operation von $SL_2(\underline{O})$ auf H^2 eine Operation von $A_5 \simeq SL_2(\underline{O})/\Gamma$ auf $\overline{H^2/\Gamma}$ induziert, die die 5 Spitzen permutiert, haben diese 5 Singularitäten die gleiche Struktur, und es genügt, nur die Spitze in $\infty = \frac{1}{0}$ zu betrachten. Die Isotropiegruppe dieser Spitze ist

$$(2) \qquad \Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \varepsilon \text{ Einheit von } \underline{O},\ \varepsilon \equiv 1 \pmod 2,\ \mu \equiv 0 \pmod 2 \right\} .$$

Die Grundeinheit von $\underline{O}$ ist $\varepsilon_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Diese Zahl repräsentiert ein erzeugendes Element von $(\underline{O}/2\underline{O})^* \simeq F_4^*$, einer zyklischen Gruppe der Ordnung 3. Daher ist

$$(3) \qquad \Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \varepsilon_0^a & \mu \\ 0 & \varepsilon_0^{-a} \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \equiv 0 \pmod 2,\ a \equiv 0 \pmod 3 \right\} .$$

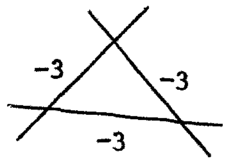
Die Struktur einer beliebigen Spitze wird durch eine Gruppe

$$G(M,V) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \varepsilon \in V,\ \mu \in M \right\}$$

beschrieben (vgl. [6] §2), wobei M ein $\mathbb{Z}$-Modul in K vom Range 2 und V eine unendlich-zyklische Gruppe von total-positiven Einheiten von

$\underline{O}$ ist, die den Modul durch Multiplikation in sich überführen. Statt Γ_∞ können wir die Gruppe $G(2\underline{O}, (U^2)^3)$ verwenden, die dasselbe Bild in $PGL_2(K)$ hat; dabei ist U die Gruppe aller Einheiten von $\underline{O}$ und deshalb U^2 die Gruppe aller total-positiven Einheiten. Die Gruppe $G(2\underline{O},(U^2)^3)$ ist durch $\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ zur Gruppe $G(\underline{O},(U^2)^3)$ konjugiert. Also ist die Spitze mit Isotropiegruppe Γ_∞ isomorph zur 3-blättrigen Überlagerung der Spitze von $H^2/SL_2(O)$, und es folgt, daß die 5 singulären Punkte von $\overline{H^2/\Gamma}$ aufgelöst werden durch jeweils eine zyklische Konfiguration singularitätenfreier rationaler Kurven der Selbstschnittzahl -3 (siehe [6] §2):

(4)

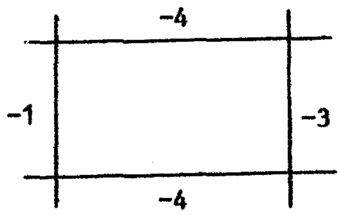


Auf der Fläche Y_0, die aus $\overline{H^2/\Gamma}$ durch Auflösung der 5 singulären Punkte entsteht, gibt es also 5 zueinander disjunkte Konfigurationen (4). Als 4-dimensionale Mannigfaltigkeit kann Y_0 so erhalten werden: H^2/Γ hat eine kompakte berandete Mannigfaltigkeit X als Deformationsretrakt, die 5 Randkomponenten hat. Jede Randkomponente ist ein Torusbündel über einer Kreislinie. Alle Randkomponenten sind zueinander isomorph. Jede Konfiguration (4) in Y_0 hat eine Tubenumgebung, die solch ein Torusbündel als Rand hat. Die Mannigfaltigkeit Y_0 entsteht, indem man X mit den Tubenumgebungen der 5 Konfigurationen (4) verklebt. Da die Euler-Poincarésche Charakteristik jeder Tubenumgebung gleich 3 ist, folgt unter Verwendung der Additivität von e und der Gleichung (1)

$$e(Y_0) = e(X) + 5\cdot 3 = e(H^2/\Gamma) + 15 = 19 . \tag{5}$$

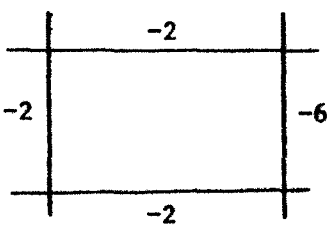
Wir werden jetzt weitere Kurven in Y_0 angeben. Die Diagonale $z_1 = z_2$ von H^2 liefert eine Kurve in H^2/Γ, die sich zu einer Kurve D in Y_0 kompaktifizieren läßt. Die Untergruppe von Γ, welche die Diagonale in sich überführt, ist die gewöhnliche Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(2)$ der Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$. Die Faktorgruppe $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(2) \simeq SL_2(F_2)$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 der Permutationen der 3 Punkte der projektiven Geraden über F_2. Der Quotientenraum $H/\Gamma(2)$ hat 3 Spitzen, nämlich $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{0}{1} = 0$, $\frac{1}{1} = 1$, den drei Punkten von $P_1(F_2)$ entsprechend. Die Kurve D muß deshalb durch die 3 Spitzen $\infty, 0, 1$ von $\overline{H^2/\Gamma}$ gehen, d.h. sie schneidet genau drei der Konfigurationen (4) in jeweils einem Punkt.

Die oben erwähnte Operation von A_5 auf $\overline{H^2/\Gamma}$ induziert eine Operation auf Y_0. Die Untergruppe $S_3 = SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(2) \subset SL_2(\underset{\sim}{O})/\Gamma = A_5$, die D in sich überführt, hat den Index 10; es gibt also 10 Kurven auf Y_0 (darunter D selbst), die bei der A_5-Operation aus D hervorgehen. Diese 10 Kurven auf Y_0 nennen wir "Diagonalen". Aus Symmetriegründen ist jede Diagonale durch die 3 Spitzen der insgesamt 5 Spitzen bestimmt, durch die sie geht, oder natürlich auch durch die 2 Spitzen, durch die sie nicht geht. Wir numerieren die Spitzen mit 0, 1, 2, 3, 4. (Diese Indices mögen der Reihe nach den durch ∞, 0, 1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ repräsentierten Spitzen entsprechen.) Mit D_{ij} $(0 \leq i,j \leq 4,\ i \neq j)$ werde diejenige Diagonale bezeichnet, die nicht durch die i-te Spitze und auch nicht durch die j-te Spitze geht (also $D_{ij} = D_{ji}$). Wir wollen jetzt beschreiben, wie die Kurven D_{ij} die Spitzenauflösungen (4) schneiden, indem wir die Frage auf die entsprechende Frage für die Diagonale in $H^2/SL_2(O) = (H^2/\Gamma)/A_5$ reduzieren. Da A_5 die 5 Konfigurationen (4) permutiert, operiert auf jeder solchen Konfiguration eine zu A_4 isomorphe Gruppe. Die Gruppe A_4 hat die Kleinsche Vierergruppe V als Normalteiler. Um die Bildung des Quotienten einer Konfiguration (4) durch A_4 zu verstehen, wählt man zunächst eine nicht-triviale Involution $\tau \in V$ aus. Man kontrolliert, daß die Involution τ auf der Konfiguration so operiert: Sie hat eine der 3 Geraden als Fixgerade und den gegenüberliegenden Punkt als isolierten Fixpunkt. Der Fixpunkt wird aufgeblasen. Dies ergibt



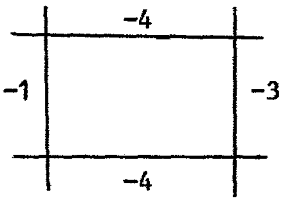
(die Vertikalen sind Fixgeraden für τ)

Nach Teilung durch die Involution τ ergibt sich



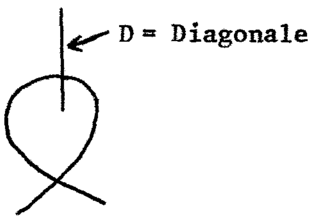
(die Horizontalen sind Fixgeraden für $V/\{1,\tau\}$)

Die weitere Teilung durch $V/\{1,\tau\}$ ergibt



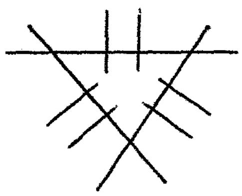
und nach Niederblasen der (-1)-Kurve wieder eine Konfiguration (4). In anderen Worten, wenn wir die ursprüngliche Spitzensingularität durch V teilen, erhalten wir eine Singularität, die ebenfalls durch eine Konfiguration (4) aufgelöst wird. Die Gruppe $A_4/V \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ operiert auf dieser Konfiguration auf naheliegende Weise, und der Quotient ist eine rationale Kurve mit Doppelpunkt. Dies ist die Auflösung der Spitze von $\overline{H^2/SL_2(\underline{O})}$. Die durch die Diagonale $z_1 = z_2$ repräsentierte Kurve in der desingularisierten Kompaktifizierung von $H^2/SL_2(\underline{O})$ geht transversal durch die aufgelöste Spitze wie folgt

(6)

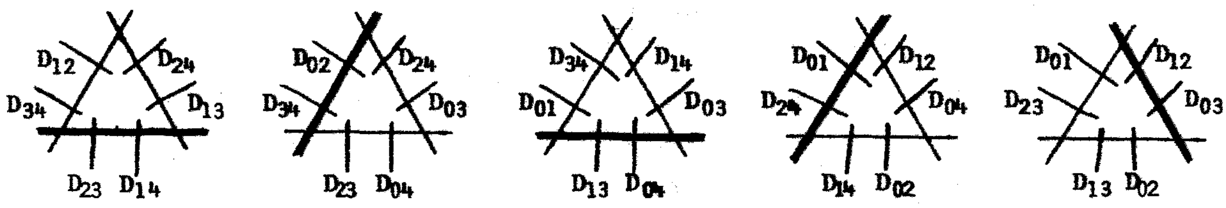


(siehe [6] §4) .

Die Konfiguration (4) ist eine 12-blättrige Überlagerung von (6). Es gehen 6 der Diagonalen durch die Kurven der Konfiguration (4) :



Hierauf operiert A_4 und zwar transitiv auf der Menge der 6 Diagonalen. Dabei führt die Involution τ , welche eine Gerade von (4) als Fixgerade hat, die beiden Diagonalen, welche diese Gerade schneiden, in sich über; andererseits ist τ eine fixpunktfreie Involution auf der Menge der 4 übrigen Spitzen. Aus Symmetriegründen folgt allgemein: wenn i, j, k, l, m verschiedene Indices sind (d.h. $\{i,j,k,l,m\} = \{0,1,2,3,4\}$) , dann gehen D_{ij} und D_{kl} durch <u>dieselbe</u> Kurve der Auflösung der m-ten Spitze, während D_{ij} und D_{ik} durch <u>verschiedene</u> Kurven der Auflösung der l-ten Spitze und durch <u>verschiedene</u> Kurven der Auflösung der m-ten Spitze gehen. Die Gesamtkonfiguration der Spitzenauflösungen und Diagonalen sieht so aus:



0 1 2 3 4

(7) (10 <u>singularitätenfreie rationale Kurven</u> D_{ij} <u>der Selbstschnittzahl</u> -1 , <u>die zueinander disjunkt sind;</u> 15 <u>singularitätenfreie rationale Kurven der Selbstschnittzahl</u> -3 , <u>die sich in</u> 5 <u>Dreiecken anordnen und jeweils</u> 2 <u>der</u> D_{ij} <u>nach obigem Schema transversal schneiden</u>)

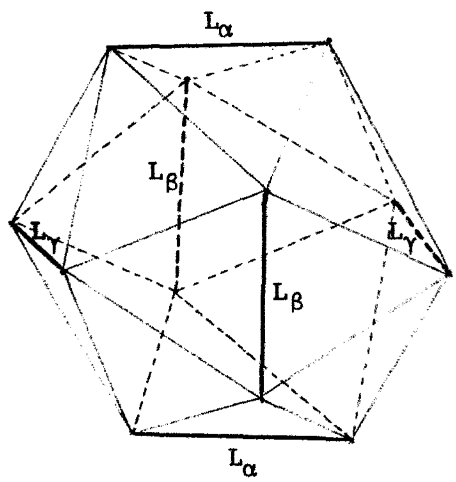
Die fett ausgezeichneten Kurven werden später eine Rolle spielen. Wir müssen noch den Beweis einiger in (7) notierter Tatsachen nachtragen. Jede Diagonale liegt singularitätenfrei in H^2/Γ, und zwei verschiedene Diagonalen schneiden sich nicht. Es ist nämlich leicht zu überprüfen, daß zwei zur Diagonalen $z_1 = z_2$ unter $SL_2(\mathcal{O})$ äquivalente Kurven auf H^2 sich nicht schneiden können (vgl. [7], 3.4 oder [8]). Die Euler-Poincarésche Charakteristik von $H/\Gamma(2)$ ist gleich dem normierten Volumen, also gleich -1 , da $H/SL_2(\mathbb{Z})$ das normierte Volumen $-\frac{1}{6}$ hat. Für $D_{ij} \simeq H/\Gamma(2) \cup \{3 \text{ Punkte}\}$ ist $e(D_{ij}) = 2$. Deshalb ist D_{ij} eine rationale Kurve. Sie liegt auch singularitätenfrei in Y_0 , da sie transversal durch die Spitzenauflösungen geht. Sie hat die Selbstschnittzahl -1 , was aus der Formel [6] 4.3 (19) folgt. Diese Formel kann nämlich ohne Änderung auf unseren Fall angewendet werden und liefert $c_1[D_{ij}] = 1$, wo c_1 die erste Chernsche Klasse von Y_0 ist. Die Selbstschnittzahl ergibt sich dann aus der Adjunktionsformel.

Zum Abschluß des Paragraphen erwähnen wir noch, daß Y_0 regulär ist, d.h. die erste Bettische Zahl 0 hat (siehe [11]). Diese Tatsache wird in §2 verwendet werden, um Y_0 mit gewissen anderen algebraischen Flächen zu identifizieren.

§2. <u>Die Kleinsche Ikosaederfläche</u> Y_1 <u>und die Clebschsche Diagonalfläche</u> Y_2

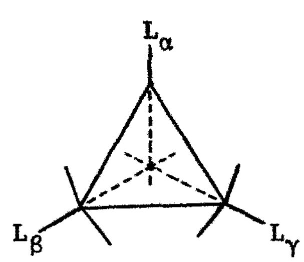
Sei $I \subset R^3$ ein Ikosaeder, dessen 12 Eckpunkte auf der Einheitssphäre S^2 liegen. Diese 12 Punkte bestimmen 6 Punkte auf $S^2/\{\pm 1\} = P_2(R)$. Ebenfalls bestimmen die 20 Mittelpunkte der Flächen von I (d.h. die 20 Eckpunkte des zu I dualen Dodekaeders I^*) 10 Punkte auf $P_2(R)$. Dies liefert insgesamt 16 Punkte auf $P_2(\mathbb{R}) \subset P_2(\mathbb{C})$; wir bezeichnen mit Y_1 die Fläche, die man aus $P_2(\mathbb{C})$ durch Aufblasen dieser 16 Punkte erhält. Offensichtlich hat Y_1 die Eulerzahl $e(P_2(\mathbb{C})) + 16 = 19$.

Jedes antipodische Paar von Kanten von I bestimmt einen Großkreis auf S^2 und somit eine Gerade auf $P_2(\mathbb{R})$. Die entsprechende Gerade auf $P_2(\mathbb{C})$ bestimmt eine Kurve auf Y_1 ; wir bezeichnen die so erhaltenen 15 Kurven auf Y_1 mit L_α $(\alpha = 1,\ldots,15)$. Wenn zwei Kurven L_α und L_β aus Kanten von I entstehen, die durch denselben Eckpunkt von I hindurchgehen, dann sind L_α und L_β auf Y_1 disjunkt, da dieser Eckpunkt ja aufgeblasen worden ist. Damit L_α und L_β sich auf Y_1 schneiden, müssen die entsprechenden Kanten von I in R^3 zueinander senkrechte Richtungen haben. Die 15 Kurven L_α teilen sich auf in 5 Gruppen von 3 Kurven, die sich paarweise in jeweils einem Punkt schneiden. Dies ist äquivalent zu der schon den alten Griechen bekannten Tatsache, daß man auf fünf verschiedene Weisen einen Würfel um ein Ikosaeder legen kann:



(Die Abbildung zeigt drei Kanten-Paare von I , die einer Gruppe von sich schneidenden Kurven L_α, L_β, L_γ auf Y_1 entsprechen. Die 3 Schnittpunkte von L_α, L_β, L_γ entsprechen auf dem Bild den 6 Mittelpunkten der 6 fett gezeichneten Kanten.)

Es folgt, daß die 15 Kurven L_α eine aus 5 disjunkten "Dreiecken" bestehende Konfiguration bilden; diese Kurven sind alle rationale Kurven der Selbstschnittzahl -3 (jedes L_α entsteht aus einer Geraden in der projektiven Ebene; vier Punkte auf dieser Geraden wurden aufgeblasen). Schließlich schneidet jede der 10 Kurven auf Y_1 , die durch Aufblasen der Eckpunkte von I* entstanden, genau drei der Kurven L_α , und zwar drei aus verschiedenen "Dreiecken". Es gehen nämlich durch den Mittelpunkt von jeder Fläche von I drei (Fortsetzungen von) Kanten von I :

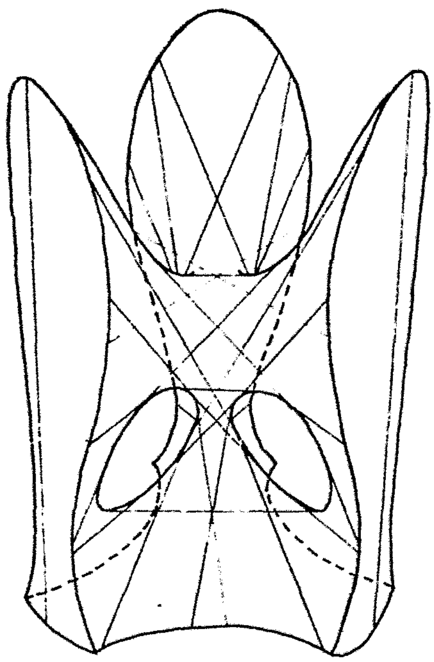


Man überzeugt sich jetzt leicht, daß diese 10 Kurven der Selbstschnittzahl −1 und die 15 Kurven L_α der Selbstschnittzahl −3 genau eine Konfiguration wie in (7) bilden.

Wir haben also eine kompakte Fläche Y_1 konstruiert, die dieselbe Eulerzahl hat wie die Hilbertsche Modulfläche Y_0, und auf der sich genau dieselbe—reichlich komplizierte—Konfiguration von Kurven befindet, wie wir sie schon auf Y_0 gefunden hatten. Es ist natürlich, zu fragen, ob die Flächen Y_0 und Y_1 nicht vielleicht isomorph sind. Bevor wir diese Frage beantworten, beschreiben wir noch eine klassische Konstruktion, die zu einer Fläche mit denselben Eigenschaften führt. Der Ausgangspunkt ist eine von Clebsch eingeführte kubische Fläche [1], die—wegen der besonderen Gestalt ihrer definierenden Gleichungen—häufig die "Diagonalfläche" genannt wird:

$$(8) \qquad F = \left\{ x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in P_4(\mathbb{C}) \;\middle|\; \sum_{i=0}^{4} x_i = 0,\ \sum_{i=0}^{4} x_i^3 = 0 \right\} .$$

Ein Modell dieser Fläche in R^3 (genauer, ein affines Modell ihrer reellen Punkte) mit den 27 Geraden darauf zeigt die folgende Abbildung, die an Hand eines Gipsmodells aus der Sammlung des Heidelberger Mathematischen Instituts hergestellt wurde. Das Gipsmodell geht auf Clebsch zurück, und ein Exemplar soll 1894 von Klein auf der Weltausstellung in Chicago gezeigt worden sein [5].



Der Schnitt von F mit der Hyperfläche $x_0 = 0$ besteht aus 3 Geraden

$$\begin{aligned}
&\{x \in P_4(\mathbb{C}) \mid x_0 = 0,\quad x_1 + x_2 = 0,\quad x_3 + x_4 = 0\},\\
(9)\qquad &\{x \in P_4(\mathbb{C}) \mid x_0 = 0,\quad x_1 + x_3 = 0,\quad x_2 + x_4 = 0\},\\
&\{x \in P_4(\mathbb{C}) \mid x_0 = 0,\quad x_1 + x_4 = 0,\quad x_2 + x_3 = 0\},
\end{aligned}$$

von denen sich je 2 in einem Punkt schneiden (die ersten beiden z.B. im Punkt $(0:1:-1:-1:1)$), und entsprechendes gilt für jede Hyperfläche $x_j = 0$. Somit erhalten wir 15 Geraden auf F (von den 27, die es insgesamt gibt), die auf natürliche Weise in 5 Gruppen von je 3 sich paarweise schneidenden aufgeteilt sind. Diese 15 Geraden haben aber andere Schnittpunkte, nämlich die 10 Punkte P_{ij} $(0 \leq i,j \leq 4;\ i \neq j)$, die durch $x_i = -x_j$, $x_k = 0$ $(k \neq i,j)$ gegeben werden ($P_{ij} = P_{ji}$). Durch jeden Punkt P_{ij} gehen genau drei dieser Geraden. Sei jetzt Y_2 die Fläche, die durch Aufblasen der 10 Punkte P_{ij} auf F entsteht. Da F als kubische Fläche die Eulerzahl 9 hat ist $e(Y_2) = 9 + 10 = 19$. Wir nennen auch Y_2 Diagonalfläche. Auf Y_2 liegen 10 Kurven der Selbstschnittzahl -3 (jede Gerade wie in (9) hat die Selbstschnittzahl -1 auf F und geht durch zwei Punkte P_{ij}), die eine Konfiguration von 5 Dreiecken bilden, und ferner 10 Kurven D_{ij} der Selbstschnittzahl -1, die durch Aufblasen der Punkte P_{ij} entstanden sind und die 15 anderen Kurven nach dem Schema (7) schneiden. Wir haben somit eine weitere Fläche gefunden, die dieselben Eigenschaften besitzt wie Y_0 und Y_1.

<u>Satz 1:</u> <u>Bis auf Isomorphie gibt es nur eine nichtsinguläre reguläre algebraische Fläche der Eulerzahl</u> 19, <u>die eine Konfiguration von Kurven wie in (7) besitzt.</u> <u>Insbesondere sind die Hilbertsche Modulfläche</u> Y_0, <u>die Kleinsche Ikosaederfläche</u> Y_1 <u>und die Clebschsche Diagonalfläche</u> Y_2 <u>zueinander isomorph.</u>

Der Beweis wird folgendermaßen verlaufen: sei Y eine Fläche mit den im Satz aufgezählten Eigenschaften, Y' die Fläche, die nach Niederblasen der 10 disjunkten exzeptionellen Kurven D_{ij} entsteht, und Y'' die Fläche, die sich durch anschließendes Niederblasen der im Diagramm (7) fett gezeichneten Kurven (die nach Niederblasen der D_{ij} disjunkt bleiben und die Selbstschnittzahl -1 erhalten) ergibt. Dann werden wir zeigen:

a) Die Fläche Y'' ist zu $P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ isomorph.

b) Der Isomorphismus kann so gewählt werden, daß die 5 Punkte auf Y'', die durch Niederblasen der "fetten" Kurven auf Y' entstanden, auf die Punkte

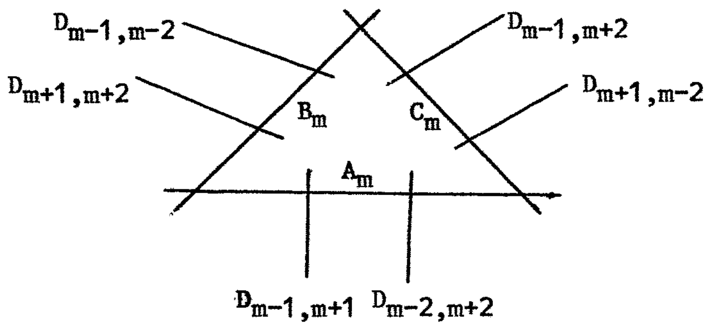
$$(10)\qquad (0,0),\ (1,1),\ (\infty,\infty),\ (-\varepsilon_0',-\varepsilon_0),\ (\varepsilon_0,\varepsilon_0')$$

($\varepsilon_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) von $P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ abgebildet werden. Die Fläche Y', die

hierdurch natürlich eindeutig bestimmt ist, ist eine kubische Fläche mit 10 "Eckardt-Punkten" (= Punkte, wo drei Geraden auf der Fläche sich schneiden).
c) Die Fläche Y entsteht aus Y' durch Aufblasen der Eckardt-Punkte.

Wegen c) ist es gleichgültig, ob man Y oder Y' betrachtet, da diese Flächen aus einander gewonnen werden können. In der Tat hat Clebsch die Fläche $Y_2' = F$ und Klein die Fläche Y_1' ($= P_1(\mathbb{C})$ mit nur den 6 Punkten aufgeblasen, die den Eckpunkten von I entsprechen) studiert, und Klein hat den Isomorphismus $Y_1' = Y_2'$ bewiesen [9].

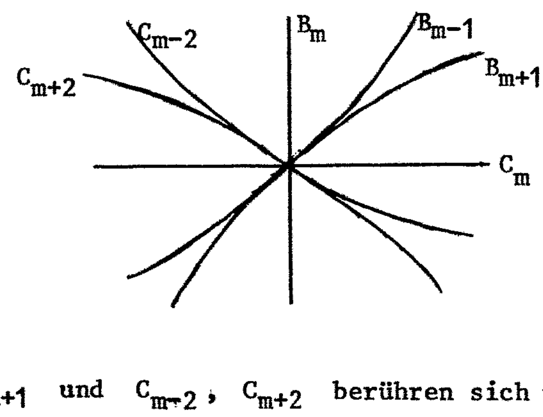
In Diagramm (7) bezeichnen wir die drei Geraden der m-ten Spitze mit A_m, B_m, C_m nach folgendem Schema, wobei m modulo 5 aufzufassen ist:



Die A_m sind unsere früheren "fetten" Kurven. Nach Niederblasen sämtlicher Kurven D_{ij} und A_m haben die 10 übrigbleibenden Kurven B_m, C_m das folgende Schnittverhalten:

i) ihre Selbstschnittzahl ist +2 ;

ii) in dem Punkt $\bar{A}_m \in Y''$, der durch Niederblasen von A_m entstand, schneiden sich 6 Kurven in einer Konfiguration



(B_{m-1}, B_{m+1} und C_{m-2}, C_{m+2} berühren sich mit der Vielfachheit 2 , die anderen Schnitte sind transversal) ;

iii) B_m und C_m schneiden sich in einem weiteren Punkt.

Jetzt nehmen wir an, wir hätten a) bewiesen: $Y'' \simeq P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$. Die Kurven B_m, C_m haben Selbstschnittzahl +2 , sind also "Kreise" auf

$P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ (d.h. Graphen von gebrochen linearen Transformationen $P_1(\mathbb{C}) \to P_1(\mathbb{C})$), und zwar handelt es sich um genau die 10 Kreise, die durch jeweils 3 der Punkte $\bar{A}_m$ gehen. Die 5 Punkte $\bar{A}_m \in P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ haben insbesondere die folgende Eigenschaft: Wenn B_m $(m \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ den eindeutig bestimmten Kreis durch $\bar{A}_{m-1}$, $\bar{A}_m$ und $\bar{A}_{m+1}$ bezeichnet, dann berühren sich für alle m die Kreise B_{m-1} und B_{m+1} im Punkt $\bar{A}_m$. Nach einer projektiven Transformation in jedem Faktor von $P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ können wir $\bar{A}_0 = (0,0)$, $\bar{A}_1 = (1,1)$, $\bar{A}_2 = (\infty,\infty)$ wählen; dann zeigt eine kurze Rechnung, daß $\bar{A}_3 = (-\varepsilon_0', -\varepsilon_0)$ und $\bar{A}_4 = (\varepsilon_0, \varepsilon_0')$ (oder natürlich $\bar{A}_3 = (-\varepsilon_0, -\varepsilon_0')$, $\bar{A}_4 = (\varepsilon_0', \varepsilon_0)$) sein müssen. Damit ist b) und die Eindeutigkeit der Fläche Y' bis auf Isomorphismus bewiesen. Also muß $Y' = Y_2' = F$ sein und die 10 aufzublasenden Punkte auf Y' sind deswegen die 10 Eckardt-Punkte, weil das auf F der Fall war. Somit ist c) auch bewiesen.

Wir kommen nun zum Beweis von a). Da Y' eine reguläre Fläche ist, auf der exzeptionelle Kurven (etwa B_0 und C_0) sich schneiden, ist Y' und damit auch Y'' rational. Da $e(Y'') = 4$, muß Y'' wegen der groben Klassifikation algebraischer Flächen eine der Regelflächen Σ_k $(k \geq 0)$ sein. Wir erinnern daran, daß Σ_k ein $P_1(\mathbb{C})$ - Bündel über $P_1(\mathbb{C})$ mit Strukturgruppe $\mathbb{C}^*$ ist, welches zwei natürliche zu einander disjunkte Schnitte S_0 und S_∞ der Selbstschnittzahlen k und $-k$ besitzt. Die Faser von Σ_k sei E. Die Homologieklassen von S_0 und E bilden eine Basis für $H_2(\Sigma_k, \mathbb{Z})$, und es gilt

$$E^2 = 0\,, \quad ES_0 = 1\,, \quad S_0^2 = k\,, \quad S_\infty \sim S_0 - kE\ .$$

Aus der Existenz einer irreduziblen Kurve der Selbstschnittzahl 2 (z.B. B_0) folgt leicht, daß $k = 0$ oder 2 ist. Sei nämlich

$$B_0 \sim \alpha S_0 + \beta E \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z})\ .$$

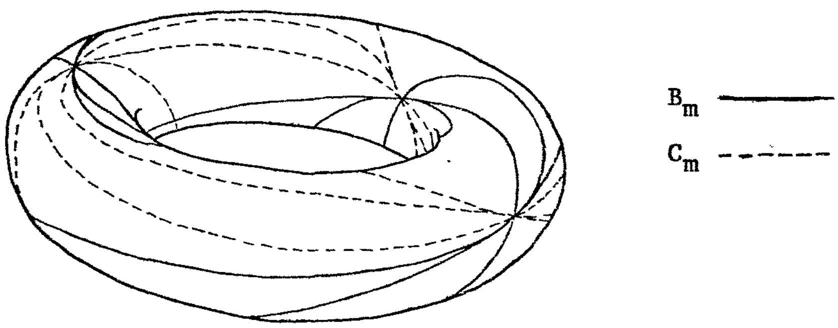
Die Kurve B_0 muß von S_∞ und von E verschieden sein, also $\alpha = B_0 E \geq 0$ und $\beta = B_0 S_\infty \geq 0$. Aber die diophantische Gleichung $2 = B_0^2 = k\alpha^2 + 2\alpha\beta$ hat eine Lösung mit $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ nur für $k=0$ oder $k=2$, wobei die einzige Lösung für $k = 2$ durch $\alpha = 1$, $\beta = 0$ gegeben wird. Die Fläche Σ_0 ist $P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$. Es bleibt nur noch auszuschließen, daß $Y'' \simeq \Sigma_2$. Wir wissen, daß in diesem Fall sämtliche Kurven B_m und C_m zu S_0 homolog und damit zu S_∞ disjunkt sind.

Wir bemerken, daß die Isomorphie $Y_0 \simeq Y_2$ bereits folgt, da die Möglichkeit $Y'' \simeq \Sigma_2$ für diese Flächen sicherlich ausscheidet. Da nämlich

S_∞ zu allen B_m, C_m disjunkt wäre, würde S_∞ auf Y im Komplement der Konfiguration (7) liegen. Das ist für $Y = Y_2$ unmöglich, da dieses Komplement in einem affinen Raum enthalten ist. Im Falle $Y = Y_0$ ist das Komplement der Konfiguration (7) in H^2/Γ enthalten. Dies führt auch zum Widerspruch, weil S_∞ einfach-zusammenhängend ist und deshalb zur universellen Überlagerung H^2 geliftet werden könnte.

Daß $Y'' \not\simeq \Sigma_2$ im allgemeinen, kann man so beweisen: $\Sigma_2 - S_\infty$ ist ein Geradenbündel über $P_1(\mathbb{C})$ mit charakteristischer Zahl 2, dessen Schnitte durch homogene Polynome vom Grade 2 in 2 Variablen gegeben werden. Die Kurven B_m $(m \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ liefern aber 5 solche Schnitte. Genau wie im Falle $P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ kann man ausrechnen, welche Folgerungen das bekannte Schnittverhalten der B_m für die Koordinaten der Schnittpunkte $\bar{A}_m$ hat. Die Rechnung, welche im anderen Falle die Punkte $\bar{A}_m$ im Wesentlichen festlegte, führt hier zu einem Widerspruch.

Die Konfiguration der 10 Kurven B_m, C_m auf $Y'' \simeq P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ sieht auf einem reellen Modell $P_1(R) \times P_1(R)$ folgendermaßen aus.



§3. Der Ring der Modulformen

Die Modulfläche Y_0 wurde in §2 mit der Fläche Y_2 identifiziert, die aus der kubischen Fläche F durch Aufblasen der 10 Eckardt-Punkte P_{ij} entstand. Wir werden dies ausnutzen, um Informationen über die Modulformen bezüglich der Gruppe Γ zu gewinnen. Die Modulformen vom Gewicht 2 entsprechen nämlich Schnitten des kanonischen Geradenbündels von Y_0. Wir betrachten zunächst Schnitte des kanonischen Geradenbündels

K von F. Dieses Bündel K ist isomorph zur Beschränkung des Hopfschen Bündels

(11) $$H = ((\mathbb{C}^5 - \{0\}) \times \mathbb{C})/\mathbb{C}^* \longrightarrow P_4(\mathbb{C})$$

auf F. (In (11) operiert $t \in \mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{C}^5$ durch Multiplikation mit t und auf $\mathbb{C}$ durch Multiplikation mit t^{-1}.) Das ist ein Spezialfall der bekannten Tatsache, daß das kanonische Bündel einer Hyperfläche vom Grade d in $P_n(\mathbb{C})$ isomorph zu H^{n+1-d} ist (hier ist $n=3$, $d=3$). Für $k=0,\dots,4$ ist die auf dem Komplement der Hyperfläche $x_k=0$ definierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^5 & \longrightarrow & (\mathbb{C}^5 - \{0\}) \times \mathbb{C} \\ (x_0,\dots,x_4) & \longrightarrow & ((x_0,\dots,x_4), x_k^{-1}) \end{array}$$

mit der $\mathbb{C}^*$-Operation in (11) verträglich, und wir erhalten einen meromorphen Schnitt von H, dessen Beschränkung auf F wir mit u_k bezeichnen werden. Ein homogenes Polynom vom Grade r in den u_k ist dann ein Schnitt von K^r. Aus den definierenden Gleichungen (8) der Fläche F folgt

(12) $$\sigma_4(u_0,\dots,u_4) = 0, \quad \sigma_2(u_0,\dots,u_4) = 0,$$

wo σ_j die j-te elementar-symmetrische Funktion bezeichnet.

Der Vektorraum der holomorphen Schnitte von $H|_F$ ist isomorph zu dem Vektorraum der holomorphen Differentialformen vom Grade 2 auf F. Der Isomorphismus ist bis auf einen konstanten Faktor ($\neq 0$) in natürlicher Weise gegeben. Wir wählen einen solchen Isomorphismus aus. Die Schnitte u_k sind dann Differentialformen auf F und können als solche zu Differentialformen auf Y_2 und damit zu Schnitten des kanonischen Bündels K' von Y_2 angehoben werden; wir erhalten somit Schnitte von K', die wir auch mit u_k bezeichnen. Sie erfüllen wieder die Relation (12). Der Divisor U_k' von u_k auf Y_2 wird gegeben durch

(13) $$U_k' = \pi^* U_k + \sum_{0 \le i < j \le 4} D_{ij},$$

wobei U_k der Divisor von u_k auf F ist, $\pi: Y_2 \to F$ die natürliche Abbildung und D_{ij} die Kurve, die durch Aufblasen von P_{ij} entstand (und die der "Diagonalen" D_{ij} auf Y_0 entspricht: vgl. (7)). Der Divisor U_k auf F ist der mit der Vielfachheit -1 zu zählende Hyperebenenschnitt $x_k=0$ auf F, der aus 3 Geraden besteht (vgl. (9)). Die Kurven auf Y_2, die diesen Geraden entsprechen, sind die drei Kurven eines "Dreiecks" im Diagramm (7); wie in §2 bezeichnen wir diese Kurven mit A_k, B_k, C_k. Da die Eckardt-Punkte P_{ij} $(i,j \neq k)$ zum Hyperebenenschnitt $x_k = 0$ gehören, folgt

$$\pi^*U_k = -(A_k + B_k + C_k) - \sum_{\substack{0\le i<j\le 4\\ i,j\neq k}} D_{ij}$$

und nach (13)

$$U_k' = -(A_k + B_k + C_k) + \sum_{\substack{0\le i\le 4\\ i\neq k}} D_{ik} \,. \tag{14}$$

Wir können u_k auch als meromorphen Schnitt des kanonischen Bündels von Y_0 ansehen, oder auch als meromorphe Differentialform von Grad 2, die außerhalb der Auflösung der k-ten Spitze holomorph und als Nullstellenmenge die Vereinigung der 4 Diagonalen hat, die nicht durch diese Spitze hindurchgehen. Auf H^2/Γ, das als Komplement von $\bigcup_i (A_i \cup B_i \cup C_i)$ in Y_0 enthalten ist, liefert u_k eine holomorphe Differentialform, deren Nullstellendivisor durch 4 Spitzen geht, oder wiederum eine Hilbertsche Modulform vom Gewicht 2 bezüglich der Gruppe Γ, die in 4 Spitzen verschwindet. In der k-ten Spitze dagegen ist diese Modulform holomorph und verschieden von Null, weil die Kurven der Auflösung mit Multiplizität -1 in U_k' auftreten (vgl. [6] 3.6, Beweis des Lemmas). Andererseits haben wir 5 Eisensteinsche Reihen E_k, die jeweils in der k-ten Spitze den Wert 1 haben und in den anderen Spitzen verschwinden; zum Beispiel ist

$$E_0(z_1,z_2) = \sum_{\substack{c,d\,\in\,\mathcal{O}\\ (c,d)=1\\ c\equiv 0 \pmod 2\\ d\equiv 1 \pmod 2}}{}' \frac{1}{(cz_1+d)^2(c'z_2+d')^2} \,,$$

wobei der Strich bedeutet, daß man modulo der Gruppe U^3 der Einheiten $\varepsilon \equiv 1 \pmod 2$ summiert; die Summation dieser nicht absolut-konvergenten Reihe ist nach dem bekannten Heckeschen Verfahren vorzunehmen. Da die Fläche Y_0 rational ist und somit geometrisches Geschlecht 0 hat, gibt es keine Spitzenformen vom Gewicht 2 bezüglich Γ (vgl. das eben zitierte Lemma aus [6]). Es folgt, daß die fünf Hilbertschen Modulformen, die den Schnitten u_k entsprechen, bis auf ein Vielfaches die Eisensteinschen Reihen E_k sind. Wir können jetzt folgenden Satz beweisen.

<u>Satz 2:</u> <u>Der graduierte Ring der Hilbertschen Modulformen von geradzahligem Gewicht zu der Gruppe</u> Γ <u>ist der Ring der Polynome in den fünf Eisenstein-</u>

<u>schen Reihen</u> $E_0,\dots,E_4$ <u>mit den Relationen</u>

$$\sigma_2(E_0,\dots,E_4) = 0\,, \qquad \sigma_4(E_0,\dots,E_4) = 0 \tag{15}$$

<u>und keinen anderen Relationen.</u>

<u>Beweis:</u> Sei $M(\Gamma) = \bigoplus M_{2r}(\Gamma)$ dieser Ring der Modulformen. Nach den vorhergehenden Überlegungen ist es klar, daß die Eisensteinschen Reihen $E_k \in M_2(\Gamma)$ die Relationen (15) und keine anderen erfüllen, weil diese genau den definierenden Gleichungen (8) der Clebschschen Fläche F entsprechen. Andererseits ist nach Shimizu die Dimension von $M_{2r}(\Gamma)$ durch

$$\dim M_{2r}(\Gamma) = \begin{cases} 5\,, & \text{falls } r=1\,, \\ 4r^2-4r+6 & \text{falls } r\geq 2 \end{cases}$$

gegeben (vgl. [6] 3.6, Theorem), und da dies mit $\dim(\mathbb{C}[E_0,\dots,E_4]/\sigma_2=\sigma_4=0)$ übereinstimmt, folgt unser Resultat.

Als Korollar des Satzes haben wir auch die Struktur von dem graduierten Ring $M(SL_2(\underline{O}))$ der Modulformen von geradzahligem Gewicht zu der ganzen Hilbertschen Modulgruppe bestimmt. Es ist nämlich $SL_2(\underline{O})/\Gamma \simeq A_5$, wobei A_5 unter der Identifizierung $Y_0 \simeq Y_2$ die Koordinaten x_i alternierend permutiert, also

$$M(SL_2(O)) = M(\Gamma)^{A_5} = (\mathbb{C}[E_0,\dots,E_4]/\sigma_2=\sigma_4=0)^{A_5}\,,$$

wobei A_5 die E_k permutiert. Aber

$$\mathbb{C}[E_0,\dots,E_4]^{A_5} = \mathbb{C}[\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\Delta]/\Delta^2=F(\sigma_1,\dots,\sigma_5)\,,$$

wobei $\Delta = \prod_{i<j}(E_i-E_j)$ und F ein gewisses Polynom ist. (In den vorstehenden Formeln sind die E_k als Unbestimmte anzusehen, und σ_j ist die j-te elementar-symmetrische Funktion in den E_k.) Es folgt

$$M(SL_2(\underline{O})) = \mathbb{C}[\sigma_1,\sigma_3,\sigma_5,\Delta]/\Delta^2=F(\sigma_1,0,\sigma_3,0,\sigma_5)\,.$$

Das Polynom $F(\sigma_1,0,\sigma_3,0,\sigma_5)$ wird in [2] (S. 378, Fußnote) angegeben, und wir erhalten

<u>Korollar 1:</u> <u>Der Ring</u> $M(SL_2(\underline{O}))$ <u>wird von den vier Modulformen</u>

$$\sigma_1 = \sum_{0\leq i\leq 4} E_i\,,\quad \sigma_3 = \sum_{0\leq i<j<k\leq 4} E_iE_jE_k\,,\quad \sigma_5 = \sum_{0\leq i\leq 4} E_i\,,\quad \Delta = \prod_{0\leq i<j\leq 4}(E_i-E_j)$$

<u>der Gewichte</u> 2, 6, 10 <u>bzw.</u> 20 <u>erzeugt, mit einer einzigen Relation:</u>

(16) $$\Delta^2 = \sigma_5 \left(3125\,\sigma_5^3 + 2000\,\sigma_5^2\sigma_3\sigma_1^2 + 256\,\sigma_5^2\sigma_1^5 - 900\,\sigma_5\sigma_3^3\sigma_1 - 128\,\sigma_5\sigma_3^2\sigma_1^4 + 16\,\sigma_3^4\sigma_1^3 + 108\,\sigma_3^5 \right) .$$

Ähnlich läßt sich die Rechnung

$$M_2(\Gamma)^{S_5} = \mathbb{C}[E_0,\dots,E_4]^{S_5}/\sigma_2 = \sigma_4 = 0 = \mathbb{C}[\sigma_1,\sigma_3,\sigma_5]$$

als die Aussage deuten, daß der Ring der symmetrischen Modulformen zu Γ von geradzahligem Gewicht (d.h. solcher, mit $f(z_1,z_2) = f(z_2,z_1)$) von den Modulformen σ_1, σ_3, σ_5 frei erzeugt wird, ein Ergebnis von Gundlach ([4], Satz 5).

Abschließend machen wir einige Bemerkungen über Modulformen von ungeradem Gewicht zu Γ und zu $SL_2(\mathcal{O})$. Auf der Clebschschen Fläche besteht der Divisor von $x_i + x_j$ aus den 3 Geraden, die durch den Eckardt-Punkt P_{ij} gehen. Durch ein Argument wie am Anfang des Paragraphen zeigt man, daß der Divisor von $E_i + E_j$ $\left(= \frac{x_i+x_j}{x_i x_j}\right)$ auf Y gleich $4\,D_{ij}$ plus einer Linearkombination der 15 Kurven der Spitzenauflösungen ist (nämlich die 6 Kurven der i-ten und j-ten Spitze, jeweils mit Multiplizität -1 und die 3 Kurven der anderen 3 Spitzen, durch die D_{ij} hindurchgeht, jeweils mit Multiplizität $+1$). Die Funktion $E_i(z_1,z_2) + E_j(z_1,z_2)$ auf H^2 ist also die vierte Potenz von einer Funktion θ_{ij}, die sich unter der Gruppe Γ wie eine Modulform vom Gewicht $1/2$ verhält und die als Nullstellenmenge das Urbild der Diagonalkurve D_{ij} mit der Vielfachheit 1 besitzt. Diese Funktionen θ_{ij} sind mit den Thetareihen von Götzky [3] und Gundlach [4] identisch. Aus der formalen Identität

(17) $$\prod_{\substack{0\le i\le 4\\ i\ne k}} (E_k + E_i) = E_k^4 + \sigma_2 E_k^2 + \sigma_4$$

folgt zum Beispiel die Identität $\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}\theta_{04} = E_0$. Indem man die Gleichungen (17) für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ miteinander multipliziert, modulo (σ_2,σ_4) reduziert und die Quadratwurzel zieht, erhält man

$$\prod_{0\le i<j\le 4} (E_i + E_j) = -\sigma_5^2 \mod (\sigma_2,\sigma_4) .$$

Deshalb gilt für das Produkt $\theta = \prod_{0\le i<j\le 4} \theta_{ij}$ die Gleichung $\theta^2 = \pm i\,\sigma_5$. Die Funktion θ ist eine Spitzenform vom Gewicht 5 von $SL_2(\mathcal{O})$, die in [4] betrachtet wird. Wegen (16) ist Δ durch θ teilbar, und Δ/θ

ist bis auf einen Faktor die Spitzenform vom Gewicht 15 für $SL_2(\mathcal{O})$, die in [4] mit H und in [10] mit χ_{15} bezeichnet wird. Der Ring der Modulformen für $SL_2(\mathcal{O})$ wird nach Gundlach [4] (Sätze 5, 8, 9, 10) von σ_1, σ_3, θ, Δ/θ erzeugt mit einer einzigen Relation, die von Resnikoff bestimmt wurde und die mit unser Relation (16) übereinstimmen muß, wenn man diese durch θ^2 dividiert. In der Tat geht die Relation bei Resnikoff ([10] Theorem 3) in (16) über, wenn man seine Funktionen φ_2, $\bar{\chi_5}$, χ_6, χ_{15} mit den unsrigen wie folgt identifiziert:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \varphi_2 \\ \sigma_3 &= -2^7\chi_6 \\ \sigma_5 &= 2^{12}(\bar{\chi_5})^2 \\ \Delta &= \pm 2^{24}\bar{\chi_5}\chi_{15} \end{aligned}$$

LITERATUR

[1] Clebsch, A.: Über die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5ten Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits. Math. Ann. 4, 284-345 (1871)

[2] Cohn, H.: Numerical study of quintics of small discriminant. Comm. Pure Appl. Math. 8, 377-385 (1955)

[3] Götzky, F.: Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher. Math. Ann. 100, 411-437 (1928)

[4] Gundlach, K.-B.: Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Math. Ann. 152, 226-256 (1963)

[5] Henderson, A.: The twenty-seven lines upon the cubic surface. Hafner Publishing Co., New York 1911

[6] Hirzebruch, F.: Hilbert modular surfaces. L'Enseignement Math. 19, 183-281 (1973)

[7] Hirzebruch, F. und D. Zagier: Classification of Hilbert modular surfaces. Erscheint demnächst

[8] Hirzebruch, F. und D. Zagier: Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus. Erscheint demnächst

[9] Klein, F.: Zusatz II zu der Arbeit: Über Flächen dritter Ordnung (Math. Ann. 6 (1873)) in Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band, Springer-Verlag, Berlin 1922 (Reprint 1973), S. 56-62

[10] Resnikoff, H.L.: On the graded ring of Hilbert modular forms associated with $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Math. Ann. 208, 161-170 (1974)

[11] Švarčman, O.V.: Simple-connectedness of the factor space of the Hilbert modular group (in Russian). Func. Anal. and its Applications (2) 8, 99-100 (1974)